Devoir Maison 06 - Eléments de Correction

Exercice 1
Partie I - Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\-2&0&-2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

1. Montrons que la matrice P est inversible en utilisant la méthode du pivot :

$$P=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\0&5&-1\\0&3&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\longleftarrow L_1+2L_2\\L_3\longleftarrow L_1-2L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\0&5&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\longleftarrow 3L_2-5L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\-2&6&10\end{pmatrix}$$

La matrice triangulaire obtenue ne contient pas zéro sur la diagonale, P est donc inversible.Continuons le calcul deP^{-1}

$$\begin{pmatrix}4&2&0\\0&10&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\longleftarrow 2L_1-L_3\\L_2\longleftarrow 2L_2+L_3\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}4&-6&-10\\0&10&10\\-2&6&10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}20&0&0\\0&10&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\longleftarrow 5L_1-L_2\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{pmatrix}20&-40&-60\\0&10&10\\-2&6&10\end{pmatrix}$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\longleftarrow L_1/20\\L_2\longleftarrow L_2/10\\L_3\longleftarrow L_3/2\end{matrix}\boxed{\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&1&1\\-1&3&5\end{pmatrix}=\mathrm{P}^{-1}}$$

2. a.b. $$P\,A\,P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\boxed{T=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=T},$$

$$\boxed{T^2=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}},T^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3\Longrightarrow\boxed{\forall n\geq 3, T^n=T^3T^{n-3}=O_3}$$

3. $T=P\,A\,P^{-1}\Leftrightarrow P^{-1}TP=\overbrace{P^{-1}P}^{I}\,A\,P^{-1}P=A\Leftrightarrow\boxed{A=P^{-1}TP}$

   Par une récurrence rapide, si on suppose $A^n=P^{-1}T^nP$, alors $A^{n+1}=A^n.A=P^{-1}T^n\overbrace{PP^{-1}}^{I}TP=PT^{n+1}P$ donc $\boxed{A^n=P^{-1}T^nP,\forall n\in\mathbb{N}^*}$

$$\forall n\geq 3, T^n=O_3\Longrightarrow\forall n\geq 3,\quad A^n=O_3$$

   (a) $\forall\,(t,t')\in\mathbb{R}^2,$
$$\begin{aligned}E\,(t)\,E\,(t')&=\left(I+tA+\tfrac{t^2}{2}A^2\right)\left(I+t'A+\tfrac{t'^2}{2}A^2\right)\\&=I+t'A+\tfrac{t'^2}{2}A^2+tA+tt'A^2+\tfrac{t^2}{2}A^2\\&=I+(t+t')\,A+\frac{\overbrace{t^2+2tt'+t'^2}^{(t+t')^2}}{2}A^2\end{aligned}$$
   en utilisant $A^3=A^4=O_3$

$$\Leftrightarrow\boxed{\forall\,(t,t')\in\mathbb{R}^2,\quad \mathrm{E}(t)\mathrm{E}(t')=\mathrm{E}(t+t')}$$

   (b) Par a. :$E\,(t)\,E\,(-t)=E(t-t)=E(0)=I$. Donc la matrice $E\,(t)$ est inversible telle que $\boxed{(E\,(t))^{-1}=E(-t)=I-tA+\frac{t^2}{2}A^2}$

   (c) $[E\,(t)]^2=E\,(t)\,E\,(t)=E\,(t+t)=E(2t).Montrons$ par récurrence que $[E\,(t)]^n=E(nt),\forall n\in\mathbb{N}$

   On a évidemment la relation intialisée à $n=0(E(0)=I=(E\,(t))^0),n=1,n=2$

   Supposons qu'il existe un entier n tel que :$[E\,(t)]^n=E(nt)$, alors $[E\,(t)]^{n+1}=[E\,(t)]^n\,E(t)=E(nt)E(t)=E(nt+t)=E((n+1)\,t)$, ce qui prouve l'hérédité de la relation et achève sa preuve en vertu du principe de récurrence.

   Donc :$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ [E\,(t)]^n=E(nt)=I+ntA+\frac{n^2t^2}{2}A^2}$

Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La méthode du pivot en 3 colonnes permet d'obtenir Q inversible et

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Un produit matriciel permet de vérifier le résultat.

3. D matrice diagonale$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

   Or $Q^{-1}BQ = D \Leftrightarrow B = QDQ^{-1}$, ce qui entraîne par une récurrence rapide,$B^n = QD^nQ^{-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Relation encore vraie pour $n = 0$.

$$Donc\ B^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & -2 \times 2^n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

4.

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & -2 \times 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ -2 + 2 \times 2^n & -1 + 2 \times 2^n \end{pmatrix}$$

$$Donc\ B^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t,

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(2 - 2^k\right)}{k!} t^k & \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(1 - 2^k\right)}{k!} t^k \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(2^{k+1} - 2\right)}{k!} t^k & \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(2^{k+1} - 1\right)}{k!} t^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2t^k - (2t)^k}{k!}}, \boxed{b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2(2t)^k - 2t^k}{k!}}$$

$$\boxed{c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k - (2t)^k}{k!}}, \boxed{d_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2(2t)^k - t^k}{k!}}$$

6. $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} = e^t$, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}$.

   Donc $\lim_{n \to +\infty} a_n(t) = 2e^t - e^{2t}$, $\lim_{n \to +\infty} b_n(t) = 2e^{2t} - 2e^t$, $\lim_{n \to +\infty} c_n(t) = e^t - e^{2t}$, $\lim_{n \to +\infty} d_n(t) = 2e^{2t} - e^t$

   (a)

$$E(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n \to +\infty} a_n(t) & \lim\limits_{n \to +\infty} c_n(t) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} b_n(t) & \lim\limits_{n \to +\infty} d_n(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

   (b) $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^t \\ -2e^t & -e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2t} & -e^{2t} \\ 2e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} = e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_{E_1} + e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{E_2}$

   (c) $E_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = E_1,\ E_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = E_2,\ E_1E_2 = O_2,\ E_2E_1 = O_2$

   (d) Pour tout t réel, $E(t)E(-t) = \left(e^tE_1 + e^{2t}E_2\right)\left(e^{-t}E_1 + e^{-2t}E_2\right) = E_1^2 + E_2^2 = I$, donc $E(t)$ est inversible telle que $\boxed{(E(t))^{-1} = E(-t) = e^{-t}E_1 + e^{-2t}E_2}$