Devoir Maison 05 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. M d'affixe z est invariant par f si et seulement si :

   avec $z \neq 2,\ z' = z = \dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2} \Leftrightarrow z\left(\overline{z}-2\right) = \overline{z}+4$, soit avec $z = x + \mathrm{i}y$:

   $(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y-2) = x - \mathrm{i}y + 4 \Leftrightarrow x^2 - \mathrm{i}xy - 2x + \mathrm{i}xy + y^2 - 2y\mathrm{i} = x - \mathrm{i}y + 4.$

   En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on obtient :

   $$\begin{cases} x^2+y^2-2x &= x+4 \\ -2y &= -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+xy-3x-4 &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

   $$\begin{cases} x^2-3x-4 &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

   L'équation $x^2-3x-4=0$ a deux solutions évidentes -1 et 4.

   Les points invariants par f sont les points d'affixes -1 et 4.

2. On a $z'_{\mathrm{C}'} = \dfrac{2\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+4}{2\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)-2} = \dfrac{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+2}{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)-1} = \dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{-\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}\sqrt{3}+1 =$ $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   Le milieu de [OC] a pour affixe $\dfrac{z_{\mathrm{O}}+z_{\mathrm{C}}}{2} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

   Le point C′ est le milieu du segment [OC].

3. (a) Pour $z/ne2$, on a $\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right) = \left(\overline{z}-2\right)\left(\dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}-1\right) = \overline{z}+4-\overline{z}+2 = 6.$

   (b) — Pour tout point M distinct de A, on a $\mathrm{A}M_1 = |\overline{z}-2|$, $\mathrm{B}M' = |z'-1|$, d'où $\mathrm{A}M_1 \times \mathrm{B}M' = |\overline{z}-2| \times |z'-1| = |\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)| = 6$ (d'après le résultat précédent.

   — Si $z \neq 2$, $z' \neq 1$ et $\overline{z}-2 \neq 0$ donc :

   $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M'}\right) = \arg\left(z'-1\right) + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$; d'autre part $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M_1}\right) = \arg\left(\overline{z}-2\right) + 2k'\pi\ (k' \in \mathbb{Z})$. Il en résulte que :

   $\arg\left[\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)\right] = \arg\left(z'-1\right) + \arg\left(\overline{z}-2\right) + 2k\pi + 2k'\pi = \arg(6) + 2k''\pi$, avec $k'' \in \mathbb{Z}$; donc finalement :

   $\arg\left[\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)\right] = 0 + 2k''\pi$ ou encore $\arg\left(z'-1\right) = -\arg\left(\overline{z}-2\right) + 2k''\pi$ ou encore :

   $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M'}\right) = -\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M_1}\right) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) Les points M et M_1 sont symétriques autour de l'axe (O, $\mathrm{Vect}\,u$) (leurs affixes sont conjuguées) et A appartient à cet axe de symétrie, donc A $M = \mathrm{A}M_1$, d'où $\mathrm{A}M \times \mathrm{B}M' = 6$.

   D'autre part $\left(\overrightarrow{u},\ \mathrm{Vect}\,\mathrm{A}M\right) = -\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M_1}\right)$

   d'où $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M'}\right) = \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + 2k\pi.$

   (d) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ est $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$; on a donc AD = 2 et BD′ = 3.

   D'autre part $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\dfrac{\pi}{6} = \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{BD}'}\right)$. D'où la construction :

   Tracer la parallèle à (AD) contenant B (méthode du parallélogramme par exemple) et construire sur cette demi-droite le point D′ tel que BD′ = 3.

Exercice 2

1. Développons : $\cos(4\theta) = 2\cos^2(2\theta) - 1 = 2\left(2\cos^2(\theta)-1\right)^2 - 1$

   ce qui donne immédiatement $\boxed{\cos(4\theta) = 8\,\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1}$

2. <u>*Conditions de définition :*</u> la fonction f est définie si et seulement si :

   $$-1 \leqslant 8x^4 - 8x^2 + 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant 8x^4 - 8x^2 + 2 & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2\left(2x^2-1\right)^2 \\ 8x^4 - 8x^2 \leqslant 0 & \Leftrightarrow \quad 8x^2(x^2-1) \leqslant 0 \end{cases}$$

   ce qui est réalisé si et seulement si $x^2 - 1 \leqslant 0$ $\qquad f$ est définie sur $I = \left[-1, 1\right]$

   <u>*Limiter l'ensemble d'étude :*</u> f est paire. On limite l'étude à $J = \left[0, 1\right]$ puis on complète la représentation par une symétrie par rapport à l'origine.

   <u>*Transformons l'expression :*</u>

   Puisque $0 \leqslant x \leqslant 1$, posons $\theta = \mathrm{Arccos}\,x$, avec $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

   Ainsi : $f(x) = \mathrm{Arccos}\left(\cos(4\theta)\right)$ donc $\begin{cases} 0 \leqslant f(x) \leqslant \pi \\ \cos\left(f(x)\right) = \cos(4\theta) \end{cases}$

   Comme "cos" est injective sur $\left[0, \pi\right]$ et que $0 \leqslant 4\theta \leqslant 2\pi$, deux cas se présentent :

   — <u>$0 \leqslant 4\theta \leqslant \pi$</u> c'est-à-dire $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant 1$

   Dans ce cas : $f(x)$ et 4θ sont dans $\left[0, \pi\right]$ $\qquad f(x) = 4\theta$

   — <u>$\pi < 4\theta \leqslant 2\pi$</u> c'est-à-dire $\frac{\pi}{4} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

   Dans ce cas : $f(x)$ et $2\pi - 4\theta$ sont dans $\left[0, \pi\right]$

   et $\cos\left(f(x)\right) = \cos(2\pi - 4\theta)$ $\qquad f(x) = 2\pi - 4\theta$

   Résumons ceci dans un tableau :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$f(x)$		$2\pi - 4\theta$		4θ	

   où $\theta = \mathrm{Arccos}\,x$

en pointillés : $4\,\mathrm{Arccos}(x)$