Devoir Maison 04 - Eléments de Correction

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2}e^{-x}$ définie sur $]0; +\infty[$

1. Soit p la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $p(x) = e^{-x}\ln x$. p est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

   $\forall x \in]0; +\infty[, p'(x) = e^{-x}\left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)$ et $p''(x) = e^{-x}\left(\ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

   Alors $p''(x) + 3p'(x) + 2p(x) = e^{-x}\left(\ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + 3e^{-x}\left(-\ln x + \frac{1}{x}\right) + 2e^{-x}\ln x = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{-x} = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{-x}$

   donc la fonction p définie sur $]0; +\infty[$ par $\boxed{p(x) = e^{-x}\ln x}$ est <u>solution de (E)</u>

   Equation homogène : $y'' + 3y' + 2y = 0$

   On écrit l'équation caractéristique : $r^2 + 3r + 2 = 0$ et on la résout :

   elle admet deux solutions réelles $r_1 = -1$ et $r_2 = -2$ alors

   $\boxed{\mathcal{S}_{EH} = \left\{f_{A,B} : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

2. $\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{f_{A,B} : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x} + e^{-x}\ln x, (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

   $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = \frac{1}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{-1} + Be^{-2} + e^{-1}\ln 1 = 0 \\ -Ae^{-1} - 2Be^{-2} + e^{-1}(-\ln 1 + 1) = \frac{1}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae + B = 0 \\ -Ae - 2B + e = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

   Conclusion : $\boxed{\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = e^{-x}\ln x}$

3. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ en tant que produit de focntions dérivables sur $]0; +\infty[$ et

   $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = e^{-x}(-\ln x + \frac{1}{x}) = \frac{e^{-x}}{x}(1 - x\ln x)$

   $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{e^{-x}}{x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = 1 - x\ln x$

   h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[, h'(x) = -\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\ln \geq 1 \Leftrightarrow \ln x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq e^{-1}$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$1 + e^{-1}$	$\searrow$	$-\infty$

   h est continue et strictement croissante sur $]0; e^{-1}[$ et $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$ donc $\forall x \in]0; e^{-1}[, h(x) > 0$

   h est continue et strictement décroissante sur $]e^{-1}; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ donc h réalise une bijection de $]e^{-1}; +\infty[$ sur $]-\infty; 1 + e^{-1}[$. Or $0 \in]-\infty; 1 + e^{-1}[$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]e^{-1}; +\infty[$. Ainsi $\forall x \in]e^{-1}; \alpha[, h(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, h(x) < 0$. On en déduit les variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Exercice 2

1. $(\mathcal{E})$ s'écrit $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f\,'(x) = -f(-x) + (2 - 2x)\,e^x$, ce qui montre que $f\,'$ est dérivable (somme et composée de fonctions dérivables).

   Nous pouvons dériver cette égalité, et aussi remplacer x par $-x$ (elle est valable pour tout réel), ce qui donne

   $$f\,''(x) = f\,'(-x) - 2\,x\,e^x$$
   $$f\,'(-x) = -f(x) + (2 + 2x)\,e^{-x}$$

   En substituant, f vérifie $\quad f\,''(x) = -f(x) + (2 + 2x)\,e^{-x} - 2\,x\,e^x$,

   donc f est solution de l'équation différentielle

   $\boxed{(\mathcal{F}) \quad y'' + y = (2 + 2\,x)\,e^{-x} - 2\,x\,e^x}$

2. $(\mathcal{F})$ est une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

   Son équation caractéristique $t^2 + 1 = 0$ a pour solutions $t = \pm i$.

   Les solutions de l'ESSMA sont donc $\quad y = A\,\sin x + B\,\cos x\,,\ A, B \in \mathbb{R}$.

   On obtient une solution particulière par la technique de superposition :

   •une solution de $y'' + y = (2\,x + 2)\,e^{-x}$ sous la forme $y(x) = (a\,x + b)\,e^{-x}$
   donne $2\,a\,x^2 - 2\,a + 2\,b = 2\,x^2 + 2$ d'où $y_1(x) = (x + 2)\,e^{-x}$

   •une solution de $y'' + y = -2\,x\,e^x$ sous la forme $y(x) = (a\,x + b)\,e^x$
   donne $2\,a\,x^2 + 2\,a + 2\,b = -2\,x$ d'où $y_2(x) = (-x + 1)\,e^x$

   Finalement, les solutions de $(\mathcal{F})$ sont

   $$\boxed{y(x) = A\,\sin x + B\,\cos x + (x + 2)\,e^{-x} + (-x + 1)\,e^x\,,\ A, B \in \mathbb{R}}$$

3. Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc les fonctions de cette forme que vérifient la condition, soit

   $$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad y'(x) + y(-x) = (2 - 2\,x)\,e^x$$
   $$\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad (A + B)\left(\cos x - \sin x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A + B = 0$$

   d'où $\quad \boxed{f(x) = A\,(\sin x - \cos x) + (x + 2)\,e^{-x} + (-x + 1)\,e^x\,,\ A \in \mathbb{R}}$