

Devoir Maison 03

Pour le lundi 7 Octobre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit, pour $x \in I =]0, \pi[$, les deux équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : y' \sin(x) - y \cos(x) = \sin^2(x) e^x$$

$$(E_2) : y'' + y = (\sin(x) + 2 \cos(x)) e^x$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions de (E_1) est inclus dans l'ensemble des solutions de (E_2) . On pourra :
 - prendre une solution de (E_1)
 - montrer qu'alors elle est deux fois dérivable
 - dériver (E_1) et en déduire que toute solution de (E_1) est aussi solution de (E_2)
 - notez que \sin ne s'annule pas sur $I =]0, \pi[$
 2. (a) Justifier le changement de fonction inconnue $z = \frac{y}{e^x}$ autrement dit montrer que y est deux fois dérivable si et seulement si z est deux fois dérivable..
(b) Quelle est l'équation (E_3) obtenue quand on applique ce changement à (E_2) ?
On pourra :
 - exprimer y en fonction de z (un produit est préférable à un quotient)
 - calculer y' et y'' .
 - remplacer dans (E_2)
 - (c) Intégrer (E_3) .
 - (d) En déduire les solutions réelles de (E_2)
 - (e) Parmi les solutions réelles de (E_2) , déterminer celles de (E_1) .
3. Intégrer directement l'équation (E_1) sur $I =]0, \pi[$. Comparer les résultats.