# Devoir Maison 02 - Eléments de Correction

**Exercice 1**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2}$

1. La fonction est définie pour tout réel $x$ tel que $1+\cos x \neq 0$

   or $1+\cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \pi[2\pi]$ donc le domaine de définition $D$ de $f$ est $\boxed{D = \mathbb{R} - \{\pi[2\pi]\}}$.

2. $\forall x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)\cos(-x)}{(1+\cos(-x))^2} = \dfrac{-\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} = -f(x)$ donc $\underline{f \text{ est impaire}}$.

3. $\forall x \in D, f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)\cos(x+2\pi)}{(1+\cos(x+2pi))^2} = \dfrac{\sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} = f(x)$.

   $f$ est périodique de période $2\pi$ donc on obtient toute la courbe représentative de $f$ à partir de celle construite sur $]-\pi;\pi[$ par itération. Sachant que de plus $f$ est impaire et que la courbe est donc symétrique par rapport à l'origine on peut encore restreindre l'étude à l'intervalle $\underline{[0;\pi[}$.

4. (a) $f$ est dérivable sur $[0;\pi[$ en tant que produit et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\pi[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $[0;\pi[$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0;\pi[, f'(x) &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(1+\cos x)^2 + 2(1+\cos x)\sin^2 x \cos x}{(1+\cos x)^4} \\
&= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x + 2\sin^2 x \cos x}{(1+\cos x)^3} \\
&= \frac{\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos x - \cos^3 x}{(1+\cos x)^3} \\
&= \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{(1+\cos x)^3} \\
&= \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(1+\cos x)^3} \\
&= \frac{2\cos x - 1}{(1+\cos x)^2}
\end{aligned}$$

   Pour tout réel $x$ appartenant à $[0;\pi[$, $(1+\cos x)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2\cos x - 1$

   $2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; \frac{\pi}{3}]$

   alors $\underline{f \text{ est croissante sur } [0;\frac{\pi}{3}] \text{ et décroissante sur } [\frac{\pi}{3};\pi[}$

   (b) On pose $t = \pi - x$ alors $t$ tend vers $0^+$ quand $x$ tend vers $\pi^-$.

$$f(\pi - t) = \frac{\sin(\pi-t)\cos(\pi-t)}{(1+\cos(\pi-t))^2} = \frac{-\sin t \cos t}{(1-\cos t)^2}$$

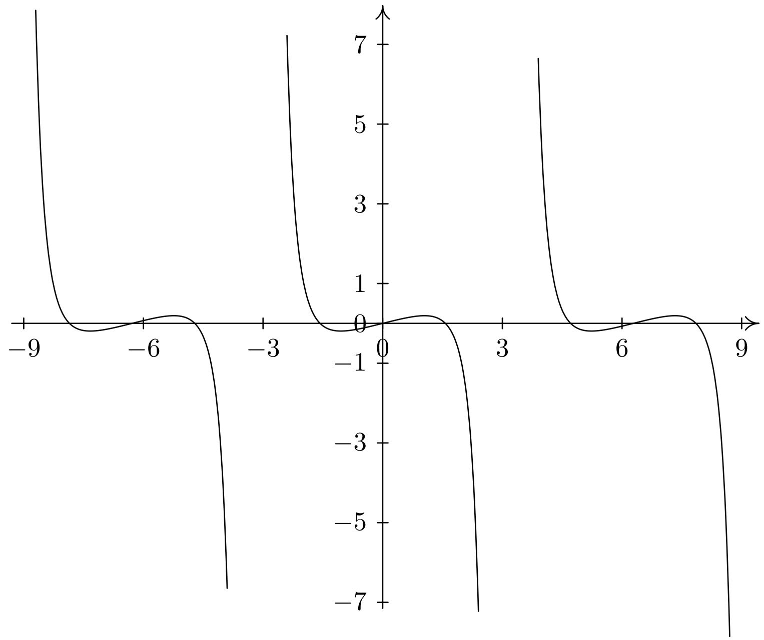
   or $sin(t) \geq 0$ d'où $sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$.

$$f(\pi-t) = \frac{-\sqrt{1-\cos^2(t)}}{(1-\cos t)^2}\cos(t)$$

$$f(\pi-t) = \frac{-\sqrt{1-\cos(t)}}{(1-\cos t)^2}\sqrt{1+\cos(t)}\cos(t)$$

$$f(\pi-t) = \frac{-1}{(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+\cos(t)}\cos(t)$$

   or $\lim\limits_{t\to 0^+} \cos(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0^+}(1-\cos(t)) = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = -\infty}$

5. 


**Exercice 2**

On définit les applications
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto 3n \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto E\left(\frac{n}{3}\right)$$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, g \circ f(n) = g(3n) = E\left(\frac{3n}{3}\right) = n$. Donc $g \circ f = Id_{\mathbb{N}}$

2. 
   - Si $n \equiv 0[3]$ alors $\exists p \in \mathbb{N}, n = 3p$ donc $g(n) = p$ d'où $f \circ g(n) = 3p = n$
   - Si $n \equiv 1[3]$ alors $\exists p \in \mathbb{N}, n = 3p+1$ donc $g(n) = E\left(\frac{3p+1}{3}\right) = p$ d'où $f \circ g(n) = 3p = n-1$
   - Si $n \equiv 2[3]$ alors $\exists p \in \mathbb{N}, n = 3p+2$ donc $g(n) = E\left(\frac{3p+2}{3}\right) = p$ d'où

$f \circ g(n) = 3p = n - 2$

3. 
   - Soient $n$ et $n'$ deux entiers naturels. $f(n) = f(n') \Rightarrow 3n = 3n' \Rightarrow n = n'$ donc l'application $f$ est injective.
   - 1 n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$ par $f$ car l'équation $3n = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$ alors $f$ n'est pas surjective.
   - $f$ n'étant pas surjective, elle n'est pas bijective.

4. 
   - $1 \neq 2$ mais $g(1) = 0 = g(2)$ donc l'application $g$ n'est pas injective.
   - Soit $y \in \mathbb{N}$. On pose $n = 3y$ alors $g(n) = y$ ainsi tout entier naturel $y$ admet au moins un antécédent $n$ par $g$ défini par $n = 3y$ alors $g$ est surjective.
   - $g$ n'étant pas injective, elle n'est pas bijective.

**Exercice 3**

**1** ° / Il est évident que $I$ vérifie les propriétés, donc **l'identité est une ouverture**.

**2** ° / Si $I$ constante ($I(A) = U$) est une ouverture, la propriété $a)$ impose $U = E$. Alors, la propriété $c)$ impose que $I(\emptyset) \subset \emptyset$donc $U = E = \emptyset$ qui est faux par hypothèse.

Aucune application constante n'est une ouverture.

**3** ° / Si $E = \{a\}$alors $P(E) = \{\emptyset, E\}$.

$I$ constante $\emptyset I$ constante $\{a\}$

$I$ identité $I(\emptyset) = \{a\}$ , $I(\{a\}) = \emptyset$

Quatre applications sont possibles de $P(\{a\})$dans lui même :

La propriété $a)$ impose $I(E) = E$ et la propriété $c)$impose $I(\emptyset) = \emptyset$. Ainsi, il faut que $I$ soit l'identité et la question **1** ° montre que cette condition est suffisante.

Seule l'identité est une ouverture sur $P(\{a\})$

**4** ° / Pour $E = \{a, b\}$ , $P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$. Comme ci-dessus, $I(\emptyset) = \emptyset$et $I(E) = E$. De plus $e)$ montre alors $I(\{a\}) \cap I(\{b\}) \subset I(\emptyset) = \emptyset$. Ceci ; avec $I(\{a\}) \subset \{a\}$et $I(\{b\}) \subset \{b\}$ limite à 4 le nombre de possibilités qui conviennent

$$I \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \mapsto \emptyset \\ \{a\} \mapsto \emptyset \\ \{b\} \mapsto \emptyset \\ E \mapsto E \end{array} \right. \text{ ou } I \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \mapsto \emptyset \\ \{a\} \mapsto \{a\} \\ \{b\} \mapsto \emptyset \\ E \mapsto E \end{array} \right. \text{ ou } I \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \mapsto \emptyset \\ \{a\} \mapsto \emptyset \\ \{b\} \mapsto \{b\} \\ E \mapsto E \end{array} \right. \text{ ou l'identité}$$