Devoir Maison 01

Pour le lundi 13 Septembre 2021

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Remarque : certaines notions comme la parité ou les asymptotes ne sont pas forcément vues en terminale, n'hésitez pas à venir poser vos questions si nécessaire ! Mais cela nécessite de commencer le DM un peu avant le dernier week-end.

Exercice 1

A. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boldsymbol{g(x) = \mathrm{e}^{x}(1 - x) + 1.}$$

1. Etudier le sens de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1{,}27\,;\,1{,}28]$; on note α cette solution.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$.
   Justifier que $g(x) > 0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

B. Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x} + 1} + 2.}$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interprter graphiquement ce résultat.
2. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote pour $\mathcal{C}_f$.
   (c) Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à (d).
3. (a) Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g étudiée dans la partie **A)**.
   (b) Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.

C. Encadrements d'aires

Pour tout entier naturel n, tel que $n \geqslant 2$, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient : $2 \leqslant x \leqslant n$ et $2 \leqslant n \leqslant f(x)$ et on appelle $\mathcal{A}_n$ son aire, exprimée en unités d'aire.

1. Faire apparaître $\mathcal{D}_5$ sur la figure.

2. Démontrer que pour tout x, tel que $x \geqslant 2$, on a :

$$\frac{7}{8}x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}^{x}+1} \leqslant x\mathrm{e}^{-x}.$$

3. On pose $I_n = \displaystyle\int_2^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.
4. Ecrire un encadrement de $\mathcal{A}_n$ en fonction de I_n.
5. On admet que $\mathcal{A}_n$ a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
   Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la limite de $\mathcal{A}_n$ lorsque n tend vers $+\infty$?
   Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.