Devoir Maison 01 - Eléments de Correction

Exercice 1

A. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boldsymbol{g(x) = \mathrm{e}^{x}(1-x)+1.}$$

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $g'(x) = \mathrm{e}^x(1-x) - \mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$ qui est du signe $-x$; donc
   - Sur $]-\infty\ ;\ 0[$, $g'(x) > 0$, donc g est croissante ;
   - Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) < 0$, donc g est décroissante.
   - $g'(0) = 0$; g a donc un maximum en 0 : $g(0) = 1 + 1 = 2$.
2. l'intervalle $[1{,}27\ ;\ 1{,}28]$ est inclus dans $]0\ ;\ +\infty[$, donc g est décroissante sur cet intervalle et
   $g(1,27) \approx 0,039$ et $g(1,28) \approx -0,007$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires g étant continue sur l'intervalle s'annule une seule fois en $\alpha \in [1,27\ ;\ 1,28]$. Donc $g(\alpha) = 0$.
3. On a $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.
   Donc g est croissante de 1 à $g(0) = 2$: g est donc positive sur $]-\infty\ ;\ 0[$. D'après la question précédente $g(x) > 0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

B. Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x + 1} + 2$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$; unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2. (a) On a $f(x) = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{1}{x}} + 1$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

   (b) Calculons $d(x) = f(x) - (x+2) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} + 2 - (x+2) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} - x = x\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} - 1\right] = \dfrac{x - x\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{-x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{-x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
   Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{\mathrm{e}^{-x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} d(x) = 0$, ce qui montre que la droite (d) dont une équation est $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de moins l'infini.

   (c) On a vu que $d(x) = \dfrac{-x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. Pour $x < 0$, le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc $d(x) > 0$, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de son asymptote.
3. (a) Sur $\mathbb{R}$, f est dérivable et :
   $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)+1}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.
   Le dénominateur est supérieur à 1, donc supérieur à 0 : le signe de $f'(x)$ est celui de g vu dans la partie A.
   On a donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$ et $f'(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

   (b) On sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
   Donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1} + 2 = \dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1} + 1} + 2 = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{1+\alpha-1} + 2 = \alpha - 1 + 2 = \alpha + 1$.
   Conclusion : $f(\alpha) = p\alpha + q$, avec $p = 1$ et $q = 1$.

   (c) Des questions précédentes on déduit que f est croissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$ de moins l'infini à $\alpha + 1$ et décroissante sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$ de $\alpha + 1$ à 2.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repére avec ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse α.

C. Encadrements d'aires

1. Voir plus haut.
2. On a $\mathrm{e}^x + 1 > \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} > \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} > \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1}$.
   D'autre part $x \geqslant 2 \Rightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^2$
   Or $\mathrm{e}^2 \approx 7,38$, donc $x \geqslant 2 \Rightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 7 \Leftrightarrow 8\mathrm{e}^x \geqslant 7 + 7\mathrm{e}^x \Leftrightarrow 8\mathrm{e}^x \geqslant 7\left(1+\mathrm{e}^x\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} \geqslant \dfrac{7}{8\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow \dfrac{7}{8}x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1}$.
   On a donc pour $x \geqslant 2$, $\dfrac{7}{8}x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} \leqslant x\mathrm{e}^{-x}$.
3. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où :
   $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
   Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer par parties :

$I_n = [-x\mathrm{e}^{-x}]_2^n - \displaystyle\int_2^n -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_2^n - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_2^n =$
$[-\mathrm{e}^{-x}(x+1)]_2^n = -(n+1)\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2}(2+1) = 3\mathrm{e}^{-2} - (n+1)\mathrm{e}^{-n}$.

4. On a $\mathcal{A}_n = \displaystyle\int_2^n [f(x)-2]\,\mathrm{d}x = \int_2^n \frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.
   En utilisant l'encadrement de la question 2, on a :
   $\displaystyle\int_2^n \frac{7}{8}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathcal{A}_n \leqslant \int_2^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ soit :
   $\dfrac{7}{8}I_n \leqslant \mathcal{A}_n \leqslant I_n$

5. $I_n = 3\mathrm{e}^{-2} - (n+1)\mathrm{e}^{-n}$.
   On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\mathrm{e}^n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 3\mathrm{e}^{-2}$. On en déduit :
   $\dfrac{21}{8}\mathrm{e}^{-2} \leqslant \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n \leqslant 3\mathrm{e}^{-2}$.