

Chapitre 27

Espaces vectoriels

27.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 27.1 (Espace vectoriel)

On appelle **espace vectoriel** tout ensemble E qui vérifie les propriétés suivantes :

- Pour l'addition vectorielle :
 - Commutativité : $X + Y = Y + X$
 - Associativité : $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
 - Existence du vecteur nul 0 (**élément neutre** de l'addition) tel que $X + 0 = X$
 - Existence d'un élément opposé (**opération inverse** de l'addition) tel que $X + (-X) = 0$
- Pour la multiplication par un réel :
 - Associativité des réels α et β : $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$
 - Distributivité par rapport à l'addition des réels : $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$
 - Distributivité par rapport à l'addition vectorielle $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$
 - Élément neutre 1 pour la multiplication $1X = X$

Tout élément x de cet espace E muni des deux lois (addition et multiplication par un réel) est appelé **vecteur** et peut être noté x ou \vec{x} .



Propriété 27.1 (Matrices)

Soient n et p des entiers strictement positifs.

Alors l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel, i.e. est un \mathbb{R} -ev.

Remarque : On ne considérera ici que les ensembles de matrices colonnes autrement dit à n lignes et 1 colonne.

Remarque : Le plus petit espace vectoriel est un ensemble contenant uniquement l'élément neutre pour l'addition. Chez les matrices de taille 2×2 , cet espace vectoriel serait $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

27.2 Base d'un espace vectoriel.

Définition 27.2 (Combinaison linéaire)

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs X_1, X_2, \dots, X_n de E une somme de ces vecteurs multipliés respectivement par des coefficients réels λ_i :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k$$

Exemple : Soit le \mathbb{R} -ev des matrices à 3 lignes et 1 colonne.

Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 vecteurs de cet espace vectoriel.

Soit le vecteur $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, on a alors l'égalité :

$$u = 3e_1 - 4e_2 + 7e_3$$

u est égal à une combinaison linéaire de e_1 , e_2 et e_3 .

Théorème 27.1 (Base des \mathbb{R} -ev de matrices colonnes)

Soit le \mathbb{R} -ev des matrices à n lignes et 1 colonne.

Alors une base de cet espace vectoriel est la famille des vecteurs (e_1, e_2, \dots, e_n) .

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dire que cette famille de vecteurs est une base signifie que chaque vecteur de l'espace vectoriel s'écrit comme combinaison linéaire de ces vecteurs et ceci de manière unique.

Propriété 27.2 (Nombre de vecteurs d'une base)

Soit le \mathbb{R} -ev des matrices à n lignes et 1 colonne.

Alors une base de cet espace vectoriel contient toujours n vecteurs.

27.3 Sous-espace vectoriel

Définition 27.3 (Sous-espace vectoriel)

Soit E un \mathbb{R} -ev.

Dire que F est un sous-espace vectoriel de E signifie que F est inclus dans E et que les lois de l'espace vectoriel E confèrent à F une structure d'espace vectoriel.

Théorème 27.2 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soit E un \mathbb{R} -ev.

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'élément neutre pour l'addition appartient à F , F est stable pour l'addition et F est stable pour la multiplication par les réels.



Point Méthode : Soit E l'espace vectoriel des matrices à 4 lignes et 1 colonne.



Considérons $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ tel que $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E .

$$1. 0_{4,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F.$$

2. Soient u et v deux vecteurs de F . Montrons que $u + v$ appartient aussi à F .

Comme u et v appartiennent à F , on a $u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} a' \\ 0 \\ b' \\ 0 \end{pmatrix}$ avec

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a' \in \mathbb{R}$, $b' \in \mathbb{R}$.

Alors $u + v = \begin{pmatrix} a + a' \\ 0 \\ b + b' \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a + a' \in \mathbb{R}$ et $b + b' \in \mathbb{R}$.

Donc $u + v$ appartient à F et F est stable pour l'addition.

3. Soient u un vecteur de F et λ un réel. Montrons que λu appartient aussi à F .

u appartient à F , donc $u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda a \\ 0 \\ \lambda b \\ 0 \end{pmatrix}$

avec $\lambda a \in \mathbb{R}$ et $\lambda b \in \mathbb{R}$. Donc λu appartient à F et F est stable pour la multiplication par les réels.

Finalement F est un sous-espace vectoriel de E .



Théorème 27.3 (Sous-espace vectoriel engendré)

Soit E un \mathbb{R} -ev. Soient u_1, u_2, \dots, u_n n vecteurs de E . L'ensemble F de toutes les combinaisons linéaires formées des vecteurs précédents est un sous-espace vectoriel de E . C'est le sous-espace vectoriel engendré par u_1, u_2, \dots, u_n et il est noté :

$$F = \text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Propriété 27.3 (Base d'un sous-espace vectoriel engendré)

(u_1, u_2, \dots, u_n) est une base du sous espace vectoriel F de E si et seulement si tout vecteur de F se décompose sous forme d'une combinaison linéaire unique de u_1, u_2, \dots, u_n .



Point Méthode : Soit $A = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$ tel que $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x = z \end{cases}$.

A est un sous-ensemble des matrices à 4 lignes et 1 colonne.

Réolvons $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 4x \end{cases}$

$$\text{Donc } u = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in A \Leftrightarrow u = w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow u \text{ est combinaison linéaire de } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

A est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Finalement A est le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$A = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

27.4 Applications linéaires

Définition 27.4 (Applications linéaires)

Soient E et G deux \mathbb{R} -ev. Soit f une application de E dans G .

Dire que f est une application linéaire de E dans G signifie que

1. $\forall u \in E, \forall v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v)$.
2. $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Théorème 27.4 (Applications linéaires matricielles)

Soient n et p deux entiers strictement positifs.

Soit M une matrice à p lignes et n colonnes.

Alors $f : M_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{p,1}(\mathbb{R}), u \mapsto M \times u$ est une application linéaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{p,1}(\mathbb{R})$.

Réciproquement toute application linéaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{p,1}(\mathbb{R})$ est de la forme précédente.

Définition 27.5 (Image et Noyau d'une application linéaire)

Soient n et p deux entiers strictement positifs et f une application linéaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{p,1}(\mathbb{R})$.

- Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs dont l'image par f donne le vecteur nul. Pour déterminer ces vecteurs, on résout $Mu = 0_{p,1}$. Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
- L'image de f est l'ensemble des images obtenues par f . C'est le sous-espace vectoriel de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ engendré par les images par f des vecteurs de la base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Fiche 35 - Espaces vectoriels

Exercice 1

Parmi les espaces suivants, quels sont ceux qui sont des espaces vectoriels ?

1. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ tq } a + b = 1 \right\}$

2. $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ tq} \right.$
 $\left. \begin{cases} 2a - 5b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \right\}$

3. $C = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ tq} \right.$
 $\left. \begin{cases} \alpha + \gamma - 2\delta = -1 \\ \alpha + \beta + \delta = 1 \\ 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \right\}$

4. $D = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que} \right.$
 $\left. a^2 + b = 0 \right\}$.

5. $E = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que} \right.$
 $\left. \begin{cases} 13a + 12b + 158c + 12d = 0 \\ a - 2b - 3c - 4d = 0 \end{cases} \right\}$.

6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que} \right.$
 $\left. \begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ b - 2c + a = 0 \\ c - 2a + b = 0 \end{cases} \right\}$.

7. $G = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que}$
 $\left. \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 3X\}$.

8. $H = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que}$
 $\left. \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 4X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

Exercice 2

Ecrire les vecteurs X suivants comme combinaison linéaire de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1. $n = 2$ et $X = \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ a \end{pmatrix}$

2. $n = 3$ et $X = \begin{pmatrix} a + b - 12c \\ 2b + 3c \\ 3a - 5c \end{pmatrix}$

3. $n = 4$ et $X = \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ a - d \\ 2b + 3c \\ +c + d \end{pmatrix}$

Exercice 3 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs suivants sont combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2 .

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Est-ce le cas des vecteurs suivants ?

$$D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que tout vecteur X de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3 .

2. Est-ce le cas si l'on considère seulement la famille e_1, e_2 ?

3. Est-ce le cas si l'on remplace e_3 par $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$?

4. Est-ce le cas si l'on choisit la famille $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 5

Déterminer parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 6

Donner une base de chacun des espaces vectoriels suivants :

$$1. A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \begin{cases} 2a - 5b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \right\}$$

$$2. B = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \begin{cases} \alpha + \gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \right\}$$

$$3. C = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } \begin{cases} 2a - 3b + c + 2d = 0 \\ a - 2b - 3c - 4d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{cases} \right\}.$$

Exercice 7

Soient E, F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F .

Montrer que f est linéaire dans les cas suivants, donner sa matrice dans la base canonique, expliciter le noyau de f ainsi que son image.

$$1. E = F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{avec } f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$2. E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et } F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{avec } f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

$$3. E = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ et } F = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{avec } f : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 2b \\ 2a + b \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$$

$$4. E = F = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{avec } f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 6z \\ 3x + y + 3z \\ 3x + 4z \end{pmatrix}$$

$$5. E = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ et } F = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{avec } f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - c + d \\ 2a + c + 2d \\ a - b + 2c + d \end{pmatrix}$$

Exercice 8

On considère deux matrices A et B telles que $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que l'application

$$f : \begin{matrix} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX - XB \end{matrix}$$

1. Montrer que f est une application linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Expliciter son noyau lorsque $n = 2$ et

$$(a) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Index

Symbols	
\forall, \exists	6
$\mathcal{P}(E)$	75
p -listes.....	77
A	
Addition.....	110
Antécédent.....	15
Application.....	87
Application bijective, injective, surjective	87
Applications linéaires.....	186
Applications partielles.....	95
Asymptote horizontale.....	49
Asymptote verticale.....	49
B	
Bijection et fonction réciproque.....	88
Borne supérieure, inférieure.....	19
Branche infinie en $+\infty$	49
C	
Cercles.....	94
Combinaison linéaire.....	184
Commuter.....	111
Continue par morceaux.....	63
Continuité en un nombre.....	63
Continuité sur un intervalle.....	63
Convergence.....	169
Convergence absolue.....	170
Convexité.....	70
Couple de VAR.....	175
D	
Dérivées à gauche et à droite.....	64
Dérivées partielles d'ordre 1.....	95
Dérivabilité en un point.....	64
Degré d'un polynôme.....	57
Domaine de définition.....	94
E	
Ecart-Type.....	156
Ensemble de définition.....	15
Ensemble vide.....	5
Ensembles de nombres.....	5
Equation de droite.....	93
Equiprobabilité.....	129
Equivalence et négligeabilité.....	102
Equivalents.....	51
Espérance.....	156
Espace probabilisé.....	153
Espace vectoriel.....	183
Évènement négligeable ou presque sûr	153
Évènement impossible et évènement cer-	127
tain.....	127
Expérience aléatoire et évènements..	127
Extremum.....	19
F	
Fonction.....	15
Fonction Bornée.....	19
Fonction dérivée.....	65
Fonction de répartition.....	155
Fonctions de classe C^∞	65
Fonctions de classe C^k	65
Fonctions numériques de deux variables	94
Fonctions plusieurs fois dérivables....	65
I	
Image directe.....	87
Image et Noyau d'une application linéaire	186
Indépendance.....	131, 177
Indépendance mutuelle.....	131
Intégrale.....	139
Intervalle d'entiers.....	37
L	
Ligne de niveau.....	94
Limite à droite en x_0	46
Limite à gauche en x_0	46
Limite en $+\infty$	46
Limite en $-\infty$	46

Limite finie en x_0	45	Schéma de Bernoulli	161
Limite infinie en x_0	45	Sens de variation d'une suite	28
Loi	155	Somme	37, 169
Loi binomiale	162	Sous-espace vectoriel	184
Loi conjointe	175	Suite arithmétique	29
Loi de Poisson	164	Suite convergente	101
Loi géométrique	164	Suite divergente	101
Loi hypergéométrique	163	Suite divergente vers $\mp\infty$	101
Loi Uniforme	161	Suite géométrique	30
Lois marginales	176	Suite majorée, minorée ou bornée	29
M		Suites	27
Majorant, Minorant	19	Suites Adjacentes	106
Matrice	109	Suites arithmético-géométriques	31
Matrice inversible et inverse	111	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 .	32
Matrices particulières	109	Système complet d'événements	130
Moment d'ordre r	156	Système de Cramer	85
Monôme	57	Système triangulaire	81
Monotonie	16	T	
Multiplication par un réel	110	Transposée et matrice symétrique ...	110
N		Tribu	127
Négligeabilité	51	V	
Notations ensemblistes	5, 75	Valeur absolue	8
O		VAR	154
Opérations élémentaires	82	VAR centrée	156
P		VAR $f(X)$	157
Parité	20	VAR réduite	157
Partition	75	Variance	156
Permutation	78	Vocabulaire des événements	127
Point d'inflexion	71	Z	
Polynôme	57	Zéros d'un polynôme	58
Primitive	139	Zones du plan	94
Probabilité	128		
Produit	110		
Produit cartésien	75		
Puissance x^n avec n négatif	6		
Puissance x^n avec n positif	6		
Puissance d'une matrice	121		
Puissances réelles d'un réel strictement positif	7		
R			
Représentation graphique	15		
Restriction	15		
S			
Séries	169		