Chapitre 27

Espaces vectoriels

27.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 27.1 (Espace vectoriel)
On appelle ***espace vectoriel*** *tout ensemble E qui vérifie les propriétés suivantes :*

- *Pour l'addition vectorielle :*
  - *Commutativité :* $X + Y = Y + X$
  - *Associativité :* $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
  - *Existence du vecteur nul* 0 *(**élément neutre** de l'addition) tel que* $X + 0 = X$
  - *Existence d'un élément opposé (**opération inverse** de l'addition) tel que* $X + (-X) = 0$
- *Pour la multiplication par un réel :*
  - *Asssociativité des réels α et β :* $\alpha\left(\beta X\right) = \left(\alpha\beta\right)X$
  - *Distributivité par rapport à l'addition des réels :* $\left(\alpha + \beta\right)X = \alpha X + \beta X$
  - *Distributivité par rapport à l'addition vectorielle* $\lambda\left(X + Y\right) = \lambda X + \lambda Y$
  - *Elément neutre* 1 *pour la multiplication* $1X = X$

Tout élément x de cet espace E muni des deux lois (addition et multiplication par un réel) est appelé ***vecteur*** *et peut être noté x ou $\overrightarrow{x}$.*

Propriété 27.1 (Matrices)
Soient n et p des entiers strictement positifs.
Alors l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est une espace vectoriel, i.e. est un $\mathbb{R} - ev$.

Remarque : On ne considérera ici que les ensembles de matrices colonnes autrement dit à n lignes et 1 colonne.

Remarque : Le plus petit espace vectoriel est un ensemble contenant uniquement l'élément neutre pour l'addition. Chez les matrices de taille 2×2, cet espace vectoriel serait $\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

27.2 Base d'un espace vectoriel.

Définition 27.2 (Combinaison linéaire)
On appelle ***combinaison linéaire*** *des vecteurs* $X_1, X_2, ...X_n$ *de* E *une somme de ces vecteurs multipliés respectivement par des coefficients réels* λ_i *:*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$$

Exemple : Soit le $\mathbb{R} - ev$ des matrices à 3 lignes et 1 colonne.

Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 vecteurs de cet espace vectoriel.

Soit le vecteur $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, on a alors l'égalité :

$$u = 3e_1 - 4e_2 + 7e_3$$

u est égal à une combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3.

Théorème 27.1 (Base des $\mathbb{R} - ev$ de matrices colonnes)
Soit le $\mathbb{R} - ev$ *des matrices à* n *lignes et* 1 *colonne.*
Alors une base de cet espace vectoriel est la famille des vecteurs $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$*.*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ddots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ddots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \ddots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \cdots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dire que cette famille de vecteurs est une base signifie que chaque vecteur de l'espace vectoriel s'écrit comme combinaison linéaire de ces vecteurs et ceci de manière unique.

Propriété 27.2 (Nombre de vecteurs d'une base)
Soit le $\mathbb{R} - ev$ *des matrices à* n *lignes et* 1 *colonne.*
Alors une base de cet espace vectoriel contient toujours n *vecteurs.*

27.3 Sous-espace vectoriel

Définition 27.3 (Sous-espace vectoriel)
Soit E *un* $\mathbb{R} - ev$*.*
Dire que F *est un sous-espace vectoriel de* E *signifie que* F *est inclus dans* E *et que les lois de l'espace vectoriel* E *confèrent à* F *une structure d'espace vectoriel.*

Théorème 27.2 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)
Soit E *un* $\mathbb{R} - ev$*.*
F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si l'élément neutre pour l'addition appartient à* F*,* F *est stable pour l'addition et* F *est stable pour la multiplication par les réels.*

Point Méthode : Soit E l'espace vectoriel des matrices à 4 lignes et 1 colonne.

Considérons $F = \{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.

1. $0_{4,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$.
2. Soient u et v deux vecteurs de F. Montrons que $u + v$ appartient aussi à F.

   Comme u et v appartiennent à F, on a $u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} a' \\ 0 \\ b' \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ et $a' \in \mathbb{R},\ b' \in \mathbb{R}$.

   Alors $u + v = \begin{pmatrix} a + a' \\ 0 \\ b + b' \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a + a' \in \mathbb{R}$ et $b + b' \in \mathbb{R}$.

   Donc $u + v$ appartient à F et F est stable pour l'addition.
3. Soient u un vecteur de F et λ un réel. Montrons que λu appartient aussi à F.

   u appartient à F, donc $u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda a \\ 0 \\ \lambda b \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda a \in \mathbb{R}$ et $\lambda b \in \mathbb{R}$. Donc λu appartient à F et F est stable pour la multiplication par les réels.

Finalement F est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 27.3 (Sous-espace vectoriel engendré)
Soi E un $\mathbb{R} - ev$. Soient $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n$ n vecteurs de E. L'ensemble F de toutes les combinaisons linéaires formées des vecteurs précédents est un sous-espace vectoriel de E. C'est le sous-espace vectoriel engendré par $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n$ et il est noté :

$$F = vect(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

Propriété 27.3 (Base d'un sous-espace vectoriel engendré)
$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est une base du sous espace vectoriel F de E si et seulement si tout vecteur de F se décompose sous forme d'une combinaison linéaire unique de $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n$.

Point Méthode : Soit $A = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{c} 2x + y = 0 \\ 4x = z \end{array} \right. \right\}$.

A est un sous-ensemble des matrices à 4 lignes et 1 colonne.

Résolvons $\left\{ \begin{array}{c} 2x + y = 0 \\ 4x = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = -2x \\ z = 4x \end{array} \right.$

Donc $u = \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in A \Leftrightarrow u = w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow u$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

A est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Finalement A est le sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$A = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

27.4 Applications linéaires

Définition 27.4 (Applications linéaires)
Soient E et G deux $\mathbb{R}-ev$. Soit f une application de E dans G.
Dire que f est une application linéaire de E dans G signifie que

1. $\forall u \in E,\ \forall v \in E,\ f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Théorème 27.4 (Applications linéaires matricielles)
Soient n et p deux entiers strictement positifs.
Soit M une matrice à p lignes et n colonnes.
Alors $f : M_{n,1}(\mathbb{R}) \to M_{p,1}(\mathbb{R}),\ u \mapsto M \times u$ est une application linéaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{p,1}(\mathbb{R})$.
Réciproquement toute application linéaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{p,1}(\mathbb{R})$ est de la forme précédente.

Définition 27.5 (Image et Noyau d'une application linéaire)
Soient n et p deux entiers strictement positifs et f une application linéaire de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{p,1}(\mathbb{R})$.

- *Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs dont l'image par f donne le vecteur nul. Pour déterminer ces vecteurs, on résout $Mu = 0_{p,1}$. Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.*
- *L'image de f est l'ensemble des images obtenues par f. C'est le sous-espace vectoriel de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ engendré par les images par f des vecteurs de la base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.*

Fiche 35 - Espaces vectoriels

Exercice 1
Parmi les espaces suivants, quels sont ceux qui sont des espaces vectoriels ?

1. $A = \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ tq } a+b=1\}$
2. $B = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tq $\left\{\begin{array}{c} 2a-5b+c=0 \\ b+c=0 \end{array}\right. \}$
3. $C = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tq $\left\{\begin{array}{c} \alpha+\gamma-2\delta=-1 \\ \alpha+\beta+\delta=1 \\ 2\alpha-\beta+3\gamma=0 \end{array}\right. \}$
4. $D = \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $a^2+b=0\}$.
5. $E = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{\begin{array}{c} 13a+12b+158c+12d=0 \\ a-2b-3c-4d=0 \end{array}\right. \}$.
6. $F = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{\begin{array}{c} a-2b+c=0 \\ b-2c+a=0 \\ c-2a+b=0 \end{array}\right. \}$.
7. $G = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 3X\}$.
8. $H = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 4X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

Exercice 2
Ecrire les vecteurs X suivants comme combinaison linéaire de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1. $n=2$ et $X = \begin{pmatrix} 2a+3b \\ a \end{pmatrix}$
2. $n=3$ et $X = \begin{pmatrix} a+b-12c \\ 2b+3c \\ 3a-5c \end{pmatrix}$
3. $n=4$ et $X = \begin{pmatrix} 2a+3b \\ a-d \\ 2b+3c \\ +c+d \end{pmatrix}$

Exercice 3
Posons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs suivants sont combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2.
$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$
2. Est-ce le cas des vecteurs suivants ?
$$D = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 4
Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que tout vecteur X de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3.
2. Est-ce le cas si l'on considère seulement la famille e_1, e_2 ?
3. Est-ce le cas si l'on remplace e_3 par $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$?
4. Est-ce le cas si l'on choisit la famille $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 5
Déterminer parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

$\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 6
Donner une base de chacun des espaces vectoriels suivants :

1. $A = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\left\{ \begin{array}{c} 2a - 5b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{array} \right. \}$
2. $B = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $\left\{ \begin{array}{c} \alpha + \gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right. \}$
3. $C = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $\left\{ \begin{array}{c} 2a - 3b + c + 2d = 0 \\ a - 2b - 3c - 4d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{array} \right. \}$.

Exercice 7
Soient E, F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F.
Montrer que f est linéaire dans les cas suivants, donner sa matrice dans la base canonique, expliciter le noyau de f ainsi que son image.

1. $E = F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$
avec $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$
2. $E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$
avec $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$.
3. $E = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $F = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$
avec $f : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 2b \\ 2a + b \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$
4. $E = F = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
avec $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 6z \\ 3x + y + 3z \\ 3x + 4z \end{pmatrix}$
5. $E = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et $F = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
avec $f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b - c + d \\ 2a + c + 2d \\ a - b + 2c + d \end{pmatrix}$

Exercice 8
On considère deux matrices A et B telles que $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX - XB \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Expliciter son noyau lorsque $n = 2$ et
   (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   (b) $A = B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) $A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Index