Chapitre 26

Fonctions numériques de deux variables réelles

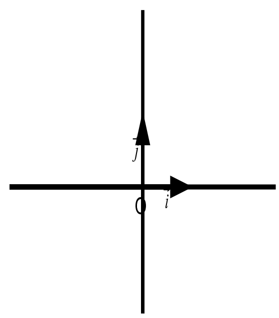
26.1 Sous-ensembles remarquables de $\mathbb{R}^2$

Définition 26.1 (Produit cartésien)
Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F, noté $E \times F$ (prononcé E croix F) est l'ensemble des couples (x, y) où x est un élément de E et y est un élément de F.

Exemple : $(-3, \pi)$ est un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ car $-3 \in \mathbb{Z}$ et $\pi \in \mathbb{R}$. Par contre $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ n'est pas un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ car, bien que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Remarque : $E \times E$ se note aussi E^2.

$\mathbb{R}^2$ désigne donc l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont des nombres réels. Traditionnellement, on représente graphiquement $\mathbb{R}^2$ sous la forme d'un plan muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Un élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ est associé au point M du plan de coordonnées (x, y). D'autre part tout point M du plan est associé naturellement à son couple de coordonnées (x, y) qui est un élément de $\mathbb{R}^2$.



représentation graphique de $\mathbb{R}^2$

Définition 26.2 (Equation de droite)
Soit un plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Dire que la droite (d) du plan admet pour équation $ax + by + c = 0$ signifie qu'un point M de coordonnées (x_M, y_M) appartient à cette droite si et seulement si $ax_M + by_M + c = 0$.

Remarque :

- L'axe des abscisses se note traditionnellement (Ox) (il s'agit d'une droite) et l'axe des ordonnées (Oy).
- La droite (Ox) est l'ensemble des points $M(x, y)$ dont l'ordonnée est nulle donc $y = 0$ est l'équation de la droite (Ox). De façon analogue, la droite (Oy) a pour équation

$x = 0$.

- Toute droite du plan, *qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées*, possède une équation réduite du type $y = ax + b$, a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.
- Toute droite du plan, *qui est parallèle à l'axe des ordonnées*, possède une équation du type $x = c$.

Définition 26.3 (Equation de cercle)
Soit un plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Un cercle de centre I de coordonnées (a, b) et de rayon r admet pour équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Autrement dit

$$C((a,b),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$$

Remarque : Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points
alors la distance $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ par le théorème de Pythagore.

Définition 26.4 (Zones du plan)
Soit f une fonction d'une variable réelle d'ensemble de définition I.

1. *La représentation graphique de f est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $x \in I$ et $y = f(x)$, autrement dit :*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y = f(x)\}$$

2. *L'ensemble "au dessus" (resp. strictement "au dessus") du graphique de f est l'ensemble suivant :*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y \geqslant f(x) \text{ (resp. } y > f(x))\}$$

3. *L'ensemble "en dessous" (resp. strictement "en dessous") du graphique de f est l'ensemble suivant :*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y \leqslant f(x) \text{ (resp. } y < f(x))\}$$

4. *L'ensemble complémentaire du graphique de f ("tout sauf le graphe de f") est l'ensemble suivant :*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \in I \text{ et } y \neq f(x)\}$$

26.2 Fonctions numériques de deux variables réelles

Définition 26.5 (Fonctions numériques de deux variables)
On appelle fonction numérique de deux variables réelles la donnée d'un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ et d'une application qui à tout couple (x, y) de Ω associe un unique nombre réel $f(x, y)$.

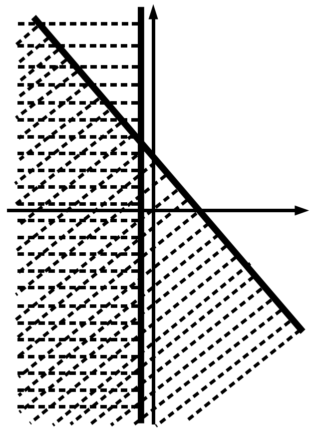
Exemple : Les fonctions $f : (x, y) \mapsto x + y$ et $g : (x, y) \mapsto \exp(xy) + y^2 - 1$ sont des fonctions numériques de deux variables réelles.

Définition 26.6 (Domaine de définition)
Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels l'expression $f(x, y)$ existe.

Point Méthode :
Soit $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\ln(2x+1)}{\sqrt{x+y-2}}$.
Déterminons son ensemble de définition.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in D_f$ si et seulement si $2x + 1 > 0$ et $x + y - 2 > 0$ autement dit $x > -\frac{1}{2}$ et $y > -x + 2$. Pour représenter D_f, il nous faut d'abord tracer deux droites :

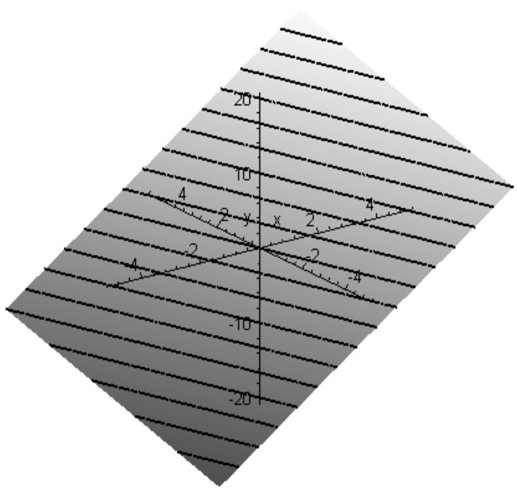
- $(d_1) : x = -\frac{1}{2}$.
- $(d_2) : y = -x + 2$.

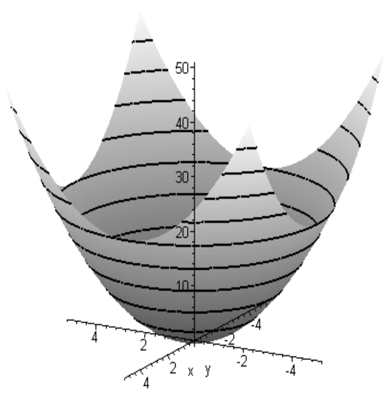
Puis il nous faut hachurer les zones qui ne nous concernent pas.



Définition 26.7 (Ligne de niveau)
Soit f une fonction numérique de deux variables réelles. On appelle ligne de niveau c l'ensemble des points de coordonnées (x, y) du plan tels que $f(x, y) = c$ ("f est constante sur la ligne de niveau")

Exemple : La ligne de niveau c de la fonction $x \mapsto x + 3y$ est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que $x + 3y = c$ autrement dit tels que $y = \dfrac{c}{3} - \dfrac{x}{3}$.
Il s'agit donc d'une droite.





Exemple : La ligne de niveau c de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est la représentation dans le plan de l'ensemble

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 = c\}$$

On remarque pour commencer que x^2 et y^2 sont toujours des nombres positifs donc x^2+y^2 est toujours positif. Par conséquent,

1. si c est strictement négatif, l'ensemble N_c se réduit à l'ensemble vide.
2. si c est nul, on a $x^2+y^2=0$ ce qui implique que $x=y=0$ donc $N_c=\{(0,0)\}$ et la ligne de niveau 0 est l'origine du repère.
3. si c est strictement positif, la ligne de niveau c est un cercle de centre le point de coordonnées $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{c}$.

26.3 Calcul différentiel

Définition 26.8 (Applications partielles)
Soit f une fonction de deux variables définie sur Ω.

- *Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, on appelle application partielle par rapport à x la fonction $f_1^{y_0}$ définie sur $D_1^{y_0}=\{x\in\mathbb{R} \text{ tel que } (x,y_0)\in\Omega\}$ par $x\mapsto f(x,y_0)$.*
- *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle application partielle par rapport à y la fonction $f_2^{x_0}$ définie sur $D_2^{x_0}=\{y\in\mathbb{R} \text{ tel que } (x_0,y)\in\Omega\}$ par $y\mapsto f(x_0,y)$.*

Définition 26.9 (Dérivées partielles d'ordre 1)
Soit f une fonction de deux variables définie sur Ω.
Soit (x_0,y_0) appartenant à l'intérieur d'Ω.

- *Dire que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en (x_0,y_0) signifie que l'application partielle $f_1^{y_0}$ est dérivable en x_0. On note alors :*
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=(f_1^{y_0})'(x_0)$$
- *Dire que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y en (x_0,y_0) signifie que l'application partielle $f_2^{x_0}$ est dérivable en y_0. On note alors :*
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=(f_2^{x_0})'(y_0)$$

Calcul des dérivées partielles : Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f:(x,y)\mapsto x^3+xy+e^x+ln(1+y^2)$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, calculons les dérivées partielles d'ordre 1 puis d'ordre 2 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2+y+e^x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+\frac{2y}{1+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x+e^x \text{ (dériver deux fois par rapport à } x\text{)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2(1+y^2)-2y(2y)}{(1+y^2)^2} \text{ (dériver deux fois par rapport à } y\text{)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)=1 \text{ (dériver par rapport à } y \text{ puis par rapport à } x\text{)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)=1 \text{ (dériver par rapport à } x \text{ puis par rapport à } y\text{)}$$

26.4 Modélisation microéconomique

Fonction d'utilité et équilibre du consommateur :
Soient deux biens X et Y et une fonction d'utilité

$$U : (x, y) \mapsto U(x, y)$$

où x représente la quantité consommée du bien X et y la quantité consommée du bien Y.
Soient R le revenu employable pour les achats, p_x et p_y les prix unitaires des biens X et Y. La contrainte budgétaire est

$$R = xp_x + yp_y$$

L'équilibre du consommateur correspond à un maximum de l'utilité obtenu sous la contrainte du budget à respecter. Le but est de déterminer le panier (x_0, y_0) tel que l'équilibre du consommateur y soit atteint.
Pour les mathématiciens, c'est un problème de maximisation d'une fonction, avec contraintes.

1. **Méthode dite des dérivées du premier et second ordre**
   La contrainte budgétaire donne :

   $$y = \frac{R - xp_x}{p_y}$$

   Sous cette contrainte, la fonction U s'écrit comme fonction de la seule variable x.

   $$\tilde{U} : x \mapsto U\left(x, \frac{R - xp_x}{p_y}\right)$$

   Il reste à déterminer le maximum de $\tilde{U}$.
   Une fonction admet un maximum si et seulement si sa dérivée s'annule en changeant de signe, du positif vers le négatif. Autrement dit une fonction admet un maximum si et seulement si sa dérivée s'annule et est décroissante ie si sa dérivée s'annule et si sa dérivée seconde est négative.
   La solution (x_0, y_0) cherchée vérifie donc les trois conditions :

   $$\tilde{U}'(x_0) = 0 \qquad \tilde{U}''(x_0) < 0 \qquad y_0 = \frac{R - x_0 p_x}{p_y}$$

   Pour déterminer le panier optimal, nous n'utiliserons dans les exercices que 2 des 3 conditions précédentes.

   $$\boxed{\tilde{U}'(x_0) = 0 \qquad y_0 = \frac{R - x_0 p_x}{p_y}}$$

   Ainsi, plusieurs paniers candidats seront parfois obtenus qu'il faudra départager en calculant leurs utilités respectives et en choisissant le panier qui a la plus grande.

2. **Méthode dite de l'égalite entre le TMS et le rapport des prix**
   Calculons $\tilde{U}'$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \tilde{U}'(x) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, \frac{R - xp_x}{p_y}) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, \frac{R - xp_x}{p_y}) \times \left(\frac{-p_x}{p_y}\right)$$

   Plaçons-nous en (x_0, y_0), on a $y_0 = \frac{R-x_0p_x}{p_y}$, ce qui nous donne l'équivalence :

$$\tilde{U}'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) \times \left(\frac{-p_x}{p_y}\right) = 0$$

   autrement dit

$$p_y \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) = p_x \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0)}{p_x} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0)}{p_y}$$

   Notons $Um_x = \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $Um_y = \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0)$

$$\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y}$$

   La solution (x_0, y_0) cherchée vérifie donc les deux conditions :

$$\boxed{\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y} \qquad y_0 = \frac{R-x_0p_x}{p_y}}$$

   Rappelons que le Taux Marginal de Substitution vaut :

$$TMS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial U}{\partial y}(x, y)}$$

   La première des deux conditions s'écrit donc comme égalité entre TMS et rapport des prix.

$$\frac{Um_x}{Um_y} = \frac{p_x}{p_y}$$

   Parfois, on trouve plusieurs paniers vérifiant ces deux conditions. Il reste à les départager en calculant leurs utilités respectives et en choisissant le (ou les) panier d'utilité maximale.

Fiche 34 - Fonctions de deux variables

Exercice 1
Donner les domaines de définition respectifs des fonctions suivantes puis représenter graphiquement ces domaines.

$$a(x,y) = \ln(3x+2y-5)$$
$$b(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$
$$c(x,y) = \frac{xy}{2x-y+3}$$
$$d(x,y) = \frac{y\ln(x)}{x^2+1}$$
$$e(x,y) = \sqrt{x-y+2}+1$$
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$$
$$g(x,y) = \frac{x^2+3}{x^2+y^2-9}$$
$$h(x,y) = \frac{x+y+1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$i(x,y) = \frac{y}{x}+\frac{x}{y}$$
$$j(x,y) = \ln(3x+2y-3)\times\ln(5-3x-2y)$$
$$k(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$$

Exercice 2
Déterminer la ligne de niveau $f(x,y)=c$ où
$f(x,y) = (x-1)^2+y^2$ et $c=4$
$f(x,y) = (x-1)^2+y^2$ et $c=-4$
$f(x,y) = 2x+3y+4$ et $c=5$
$f(x,y) = (2x+3y)^2-(3x+2y)^2$ et $c=0$
$f(x,y) = 2e^{3x}e^{2y}+2$ et $c=5$
$f(x,y) = \dfrac{2(x-3)^2+1}{5-(y+1)^2}$ et $c=2$.

Exercice 3
Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 puis d'ordre 2 des fonctions suivantes définies et dérivables sur Ω.

- $f:(x,y)\mapsto x^2+xy+y^2,\ \Omega=\mathbb{R}^2$
- $g:(x,y)\mapsto 4x^2+y^2-4yx+4x-2y-8,\ \Omega=\mathbb{R}^2$
- $h:(x,y)\mapsto x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4,\ \Omega=\mathbb{R}^2$
- $i:(x,y)\mapsto x(\ln y)^2+y^2,\ \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y>0\}$
- $j:(x,y)\mapsto (\ln y)^2+2\ln y+x^2,\ \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y>0\}$
- $k:(x,y)\mapsto \ln(x^2+y^2),\ \Omega=\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$

Exercice 4
Soient deux biens X et Y et une fonction d'utilité

$$U:(x,y)\mapsto x^2y+1$$

où x représente la quantité consommée du bien X et y la quantité consommée du bien Y.
Soient R le revenu enployable pour les achats, p_x et p_y les prix unitaires des biens X et Y.
On prend $p_x=2$, $p_y=4$ et $R=60$.

1. Ecrire la contrainte budgétaire du consommateur.
2. Déterminer l'équilibre du consommateur de deux façons différentes.
3. Quel est le niveau de l'utilité du consommateur ?
4. Dans la suite de l'exercice, le revenu est multiplié par 2. Ecrire la nouvelle contrainte budgétaire.
5. Quel est le nouvel équilibre du consommateur ? Sa nouvelle utilité ?

Exercice 5
Soient deux biens X et Y et une fonction d'utilité $U:(x,y)\mapsto xy$ où x représente la quantité consommée du bien X et y la quantité consommée du bien Y.
Soient R le revenu enployable pour les achats, p_x et p_y les prix unitaires des biens X et Y.
On prend $p_x=5$, $p_y=2$ et $R=100$.

1. Ecrire la contrainte budgétaire du consommateur.
2. Déterminer l'équilibre du consommateur.
3. Quel est le niveau de l'utilité du consommateur ?

Programme de Colle 30

Couples de variables aléatoires
- Définition, loi conjointe, lois marginales
- loi et espérance d'une fonction de couple
- Indépendance (définition, espérance et variance)

Révisions : Calcul d'intégrales

Fonctions de deux variables
- Sous-ensemble remarquables de $\mathbb{R}^2$ (Droites, Cercles).
- Ligne de niveau.
- *Mode de calcul de dérivées partielles d'ordre 1 et 2.*
- *Applications : fonction d'utilité et équilibre du consommateur en microéconomie.*

Exercices possibles
Exercices 1 à 5 semaine 29

Exercice 1 (Ensemble de défintion)
Déterminer l'ensemble de défintion des fonctions suivantes :
- $f(x,y) = \frac{x}{x+2y}$
- $g(x,y) = \frac{\ln y}{x^2+2}$
- $h(x,y) = \frac{\sqrt{1-x}}{x+y-1}$
- $i(x,y) = \sqrt{-x-y} + \sqrt{1-x}$
- $j(x,y) = \sqrt{(x+y-1)}$
- $k(x,y) = \sqrt{2-x} + \ln(x-2y+1)$
- $l(x,y) = \frac{2x+y}{x^2+y^2-4}$
- $m(x,y) = \frac{x-y}{2x^2+2y^2-8}$

Exercice 2 (Ligne de niveau)
Déterminer la ligne de niveau $f(x,y) = c$ où
1. $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 - 7$ et $c = 0$
2. $f(x,y) = \frac{e^{2x}}{e^y}$ et $c = e^8$
3. $f(x,y) = y - x + 3$ et $c = 5$

Exercice 3 (Dérivées partielles)
Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du second ordre des fonctions suivantes, définies et dérivables sur Ω :
- $a : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + (3-x-y)^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- $b : (x,y) \mapsto y^3 - 3x^2y$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- $c : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + e^{-xy}$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- $d : (x,y) \mapsto (x^2-y)(3x^2-y)$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- $e : (x,y) \mapsto x(\ln y)^2 + y^2$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y > 0\}$.
- $f : (x,y) \mapsto (\ln y)^2 + 2\ln y + x^2$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y > 0\}$.

Exercice 4 (Microéconomie)
Soient deux biens X et Y et une fonction d'utilité
$$U : (x,y) \mapsto xy^2$$
où x représente la quantité consommée du bien X et y la quantité consommée du bien Y.
Soient R le revenu enployable pour les achats, p_x et p_y les prix unitaires des biens X et Y.
On prend $p_x = 1$, $p_y = 2$ et $R = 20$.
1. Ecrire la contrainte budgétaire du consommateur.
2. Déterminer l'équilibre du consommateur.
3. Quel est alors le niveau de l'utilité du consommateur ?