Chapitre 25

Couples de variables aléatoires

25.1 Loi conjointe

Définition 25.1 (Couple de VAR)
Un couple de VAR (X, Y) sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application de Ω dans $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Omega \to \mathbb{R}^2 \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

telles que X et Y soient des VAR définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition 25.2 (Loi conjointe)
Soient (X, Y) un couple de var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On appelle loi du couple (X, Y) (ou loi de (X, Y) ou loi conjointe de X et Y) l'ensemble

$$\{((x, y), P[(X = x) \cap (Y = y)]),\ x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega)\}$$

Remarque :
Déterminer la loi conjointe revient à déterminer les probabilités de chacune des intersections.
Pour bien démarrer, il faut donc déterminer les valeurs prises par X et par Y.

Exemple : On lance deux dés équilibrés à 6 faces : un bleu et un rouge.
On note X_1 la face obtenue sur le dé rouge et X_2 la face obtenue sur le dé bleu.
Déterminons la loi du couple (X_1, X_2).
Le dé rouge peut tomber sur une face numérotée de 1 à 6.
Donc on a $X_1(\Omega) = [\![1; 6]\!]$.
De même pour le dé bleu et on a $X_2(\Omega) = [\![1; 6]\!]$.
$\forall i \in [\![1; 6]\!]$, $\forall j \in [\![1; 6]\!]$,
les résultats des dés bleus et rouges sont indépendants donc on a

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = P(X_1 = i) \times P(X_2 = j)$$

Or les dés sont équilibrés, on obtient

$$P((X_1 = i) \cap (X_2 = j)) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Ce qui donne la loi du couple (X_1, X_2).

Théorème 25.1 (Caractérisation d'une loi conjointe)
Un ensemble $\{((x,y),p_{x,y}),\ x \in I \subset \mathbb{N}$ *et* $y \in J \subset \mathbb{N}\}$ *définit une loi de probabilité si et seulement si*

1. $\forall x \in I$ *et* $\forall y \in J$, $p_{x,y} \geqslant 0$
2. $\sum\limits_{x \in I} \sum\limits_{y \in J} p_{x,y}$ *converge, de somme 1.*

25.2 Lois marginales

Définition 25.3 (Lois marginales)
Les variables X *et* Y *sont appelées variables marginales du couple* (X,Y).
La loi de la var X *(resp.* Y*) s'appelle la loi marginale de* X *(resp.* Y*) du couple* (X,Y).

Proposition 25.1 (Calcul des lois marginales)

$$\forall x \in X(\Omega),\ P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P[(X=x) \cap (Y=y)]$$

$$\forall y \in Y(\Omega),\ P(Y=y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P[(X=x) \cap (Y=y)]$$

Remarque : On applique la formule des probabilités totales en utilisant tantôt le S.C.E. $(Y=y)_{y \in Y(\Omega)}$, tantôt le S.C.E. $(X=x)_{x \in X(\Omega)}$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent, les lois marginales s'obtiennent en complétant le tableau par sommation suivant les lignes ou les colonnes.

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5	6	$P(X_1 = x)$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$P(X_2 = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

25.3 Fonctions de couples

Proposition 25.2
Soient X, Y *deux var sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
Alors $X+Y$, XY, $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$ *sont des VAR sur* $(\Omega, \mathcal{A})$.
De manière générale, si g *est une fonction de deux variables définie sur* $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ *alors* $g(X,Y)$ *est aussi une var.*

Proposition 25.3 (Loi)
Soient X, Y *deux var sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *et* g *une fonction de deux variables définie sur* $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Soit $Z = g(X,Y)$ une var dépendant uniquement de X et Y.
Alors $Z(\Omega) = \{g(x,y),\ x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega)\}$ et $\forall z \in Z(\Omega)$ on a

$$P(Z=z) = \sum_{x \text{ et } y \text{ tels que } g(x,y)=z} P\left((X=x) \cap (Y=y)\right)$$

Proposition 25.4 (Espérance)
Soient X, Y deux var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et g une fonction de deux variables définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
Soit $Z = g(X,Y)$ une var dépendant uniquement de X et Y. Alors, ***sous réserve d'existence****, on a*

$$E(Z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x,y) P\left((X=x) \cap (Y=y)\right)$$

Exemple : Reprenons l'exemple et considérons $S = X_1 + X_2$. S est la somme des 2 résultats obtenus.
Par exemple, calculons $P(S=5)$.

$$\begin{aligned} P(S=5) &= P\left((X_1=1) \cap (X_2=4)\right) + P\left((X_1=2) \cap (X_2=3)\right) \\ &\quad + P\left((X_1=3) \cap (X_2=2)\right) + P\left((X_1=4) \cap (X_2=1)\right) \\ P(S=5) &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

25.4 Indépendance

Définition 25.4 (Indépendance)
Soient X, Y 2 var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Dire que X et Y sont indépendantes signifie que $\forall x \in X(\Omega)$ et $\forall y \in Y(\Omega)$

$$P\left((X=x) \cap (Y=y)\right) = P(X=x) \times P(Y=y)$$

Proposition 25.5
Soient X et Y deux var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et soient A, B deux intervalles de $\mathbb{R}$. Alors on a

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

Proposition 25.6
Soient X et Y deux var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et soient f, g deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et sur $Y(\Omega)$.
Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux var définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes.

Proposition 25.7 (Calcul de l'espérance et de la variance)
Soient X et Y deux var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes alors, ***sous réserve d'existence****,*

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \text{ et } V(X-Y) = V(X) + V(Y)$$

Remarque :
Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$. **La réciproque est fausse.**
Par contre si $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Fiche 32 - Couples

Exercice 1
Compléter le tableau suivant de la loi conjointe de X et Y connaissant les probabilités indiquées et sachant que X et Y sont indépendantes.

$X\backslash Y$	0	1	2	3	$loideX$
0	0.04				
1	0.02				
2	0.06	0.09	0.06		
3					
$loideY$	0.2				

Exercice 2
Un atelier fonctionne avec 2 équipes d'ouvriers : une du matin et une du soir. Chaque jour on note le nombre d'ouvriers absents.
Soit X VAR égale au nombre d'absences de l'équipe du matin.
Soit Y VAR égale au nombre d'absences de l'équipe de soir.
La loi du couple (X, Y) est donnée dans le tableau suivant :

$X\backslash Y$	0	1	2	3
0	0.25	0.20	0.05	0
1	0.20	0.10	0.05	0.05
2	0.05	0.02	0.02	0.01

1. Donner les lois de X et Y.
2. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Une absence coûte 100 euros à l'usine. Quelle est la perte journalière moyenne dûe aux absences ?

Exercice 3
Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes et de même loi, avec :
$P(X_i = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X_i = 1) = \frac{5}{6}$.
Soit $S = X_1 + X_2$, $\quad P = X_1 X_2$.

1. Donner la loi du couple (S, P) puis celles de S et P.
2. S et P sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(S)$, $E(P)$, $V(S)$, $V(P)$.

Exercice 4
Un dé D comporte 20 faces marquées : 7 faces sont numérotées 1, 8 faces sont numérotées 2, 5 faces sont numérotées 3. Soit n un entier non nul. On lance n fois le dé D et on note $X_n^{(i)}$ le nombre de faces numérotées i au cours des n lancers.

1. Donner la loi de $X_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$, $X_n^{(3)}$ ainsi que leurs espérances et leurs variances respectives.
2. Lors des n lancers, pour chaque face numéro 1 (resp. 2, 3) obtenue on gagne 1 euro (resp. -2 euros, resp. a euros). Pour quelles valeurs de a, le gain moyen du jeu est-il positif ?

Exercice 5
Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0, 1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
   Quelles sont les valeurs prises par Z ?
3. Calculer $p_0 = P(Z = 0)$, $p_1 = P(Z = 1)$.
   Montrer que $p_1 = npq^{2n-2}(1 + q)$.
4. Calculer la probabilité conditionnelle
   $$P_{(X=k)}(Y = h)$$
   pour $k \in \{0, .., n\}$ et $h \in \{0, .., n - k\}$.
5. Démontrer que
   $$P(Z = s) = \sum_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s - k))$$
6. Calculer $p_s = P(Z = s)$. Vérifier que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} = \binom{n}{s}\binom{s}{k}$ En déduire que $p_s = \binom{n}{s}[p(1 + q)]^s (q^2)^{n-s}$
7. Montrer que $p(1 + q) = 1 - q^2$ et reconnaître la loi suivie par Z

Fiche 33 - Couples

Exercice 1

Un joueur lance une pièce équilibrée autant de fois que nécessaire. On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents. Par exemple , si les 9 premiers lancers ont donné successivement Pile, Pile, Face, Pile, Face, Face, Face, Pile, Pile alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{ième}$, $4^{ième}$, $5^{ième}$ et $8^{ième}$ lancers).

1. Justifier que $X_N(\Omega) = \{0, ..., N-1\}$.
2. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.
3. Déterminer la loi de X_3.
4. Montrer que $P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N$.
5. Justifier que pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$, $P_{(X_N=k)}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}$.
6. En déduire que pour tout entier k de $\{0, ..., N-1\}$, $P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) = \frac{1}{2}P(X_N = k)$.
7. En sommant cette relation de $k = 0$ à $N-1$, montrer que $P(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}$.
8. Montrer que la variable $X_{N+1} - X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   En déduire la relation $E(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N.
9. Montrer que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.
10. En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binômiale $B(N-1, \frac{1}{2})$.
    En déduire la variance $V(X_N)$.

Exercice 2 (EDHEC)

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X, Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$.

1. Montrer que : $\forall k \in [|2, n+1|]$, $P(X + Y = k) = \frac{k-1}{n^2}$.
2. Montrer que : $\forall k \in [|n+2, 2n|]$, $P(X + Y = k) = \frac{2n-k+1}{n^2}$.
3. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que :
$$P(X + Y = Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$
4. Montrer que la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$.
5. Pourquoi T est-elle indépendante de X et de Y ?
6. En faisant intervenir la variable T et en utilisant la deuxième question, déterminer la probabilité $P(X + Y + Z = n + 1)$.

Exercice 3 (EDHEC)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0; 1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.
On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$.

1. Pour tout entier naturel k, calculer $P(Z > k)$.
2. Etablir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :
$$P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k)$$
3. En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.
4. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
   Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.
   Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.
5. Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
6. Exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction de certains événements $(X = i)$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

Programme de Colle 29

Lois discrètes usuelles

- Loi géométrique (Définition, espérance, variance, exemple caractéristique)
- Loi de Poisson (Définition, espérance, variance, somme)

Révisions : Bijection : points méthodes

Couples de variables aléatoires

- Définition, loi conjointe, lois marginales
- loi et espérance d'une fonction de couple
- Indépendance (définition, espérance et variance)

Révisions : Calcul d'intégrales

Exercices possibles Exercices 1 à 3 semaine 28

Exercice 1
La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/20	1/4	0
1	17/60	1/4	1/6

1. Déterminer les lois marginales.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(X)$, $E(Y)$.

Exercice 2
On considère une urne contenant quatre boules rouges et trois boules noires.
On pioche une à une sans remise les boules de l'urne.
Pour tout entier $i \in [\![1, 2]\!]$, on note X_i le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la $i^{ème}$ boule noire.

1. Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
2. Expliciter la loi conjointe de (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
3. On note T la variable aléatoire définie par $T = X_2 - X_1$. Que représente T ? Donner son espérance.
4. Donner la loi conjointe de (T, X_1) puis la loi de T.

Exercice 3
La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	1/4	a	1/8
1	1/5	b	1/10

1. Donner les lois de X et Y.
2. Déterminer a et b de manière que X et Y soient indépendantes.
3. Quelles seraient alors les lois conditionnelles de X pour les différentes valeurs de Y ?

Exercice 4
n boîtes sont numérotées de 1 à n La boîte $n°k$ contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Préciser $E(X)$ et $V(X)$.
2. Etablir la loi du couple (X, Y).
3. En déduire la loi de Y. Calculer $E(Y)$.