Chapitre 24

Lois usuelles discrètes : la suite !

24.1 Loi géométrique

Définition 24.1 (Loi géométrique)
Soit $p \in]0;1[$. Dire qu'une var X suit une loi $\mathcal{G}(p)$ signifie que

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
2. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Situation caractéristique : Considérons une expérience aléatoire qui n'a que 2 issues possibles, le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $1-p$.
Si X désigne le nombre de fois où cette expérience a été répétée dans des conditions identiques et indépendantes jusqu'à obtenir le premier succès alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
On dit que X est le temps d'attente du premier succès.

Point Méthode :
Une entreprise de sondage interroge par téléphone des consommateurs sur l'utilisation d'un produit. La probabilité que l'un d'entre eux s'estime satisfait est de $\frac{2}{3}$. On admet que les réponses des consommateurs sont indépendantes.
Soit la VAR X égale au rang d'appel du premier consommateur satisfait.
Rédaction :
Soit l'expérience "téléphoner à un consommateur".
A cette expérience, 2 issues sont possibles :

- soit le client est satisfait avec la probabilité $\frac{2}{3}$,
- soit le client est mécontent avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On la répète autant de fois que nécessaire dans des conditions identiques et indépendantes jusqu'à obtenir un premier succès.
X est égal au rang du premier consommateur satisfait.
Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{2}{3})$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Proposition 24.1 (Espérance et Variance)
Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors

$$E(X) = \frac{1}{p} \text{ et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

24.2 Loi de Poisson

Définition 24.2 (Loi de Poisson)
Soit λ un nombre réel strictement positif. Dire que X suit une loi de Poisson de paramètre λ (noté $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$) signifie que

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

Proposition 24.2 (Espérance et Variance)
Si X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

Proposition 24.3 (Somme de 2 VAR)
Soit X_1 et X_2 deux var indépendantes suivant respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$ alors $X_1 + X_2$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Remarque : La loi de Poisson est la loi des phénomènes rares, de petite probabilité.

- Soit X la variable aléatoire du nombre de personnes réservant un billet d'avion pour Berlin le 6 février à 9H30. X suit en théorie une loi binomiale dont l'effectif est très grand - tous les clients potentiels, des millions, et le paramètre p est infinitésimal - la probabilité pour qu'un individu lambda ait envie de se rendre à Berlin le 6 février par le vol de 9H30. On approche en général la loi de X par la loi de Poisson de paramètre np.
- Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps [0,T] : la loi de X est une loi de Poisson.

Preuve :
La loi de Poisson de paramètre λ peut être utilisée en tant qu'approximation d'une loi binômiale $B(n, p)$ lorsque n est "grand" et p "petit" ($n > 50$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 10$), avec $\lambda = np$.

Ebauchons ici la preuve : la limite pour $n \to +\infty$ et $p \to 0$, sous la condition que le produit np (espérance de la variable suivant une loi $B(n, p)$) reste constant, de la probabilité binomiale $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$ est $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

En effet, écrivons avec $\lambda = np$:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Le second membre est un produit de quatre facteurs : lorsque n tend vers l'infini, le premier est constant, le second tend vers 1, le quatrième tend vers 1. Le troisième tend vers $e^{-\lambda}$. En effet, lorsque x tend vers zéro, $ln(1 + x)$ est équivalent à x. Donc, pour n tendant vers l'infini, $ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$ est équivalent à $\frac{-\lambda}{n}$ et par suite $nln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$ est équivalent à $-\lambda$. C'est dire que $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$ a pour limite $e^{-\lambda}$. D'où le résultat.

La constance de $\lambda = np$, contrainte posée pour l'approximation peut s'interpréter ainsi : plus n est grand, plus la probabilité d'apparition du phénomène est faible, sa moyenne restant la même. Dans le contexte de la loi de Poisson, elle s'explique par l'hypothèse de proportionnalité de la probabilité d'apparition du phénomène au laps de temps considéré. ■

Exemple : Suite à une vaccination contre le paludisme, dans une population à risque, on estime à 2%, compte tenu du délai d'immunisation, la proportion de personnes qui seront pourtant atteintes de la maladie. Quelle est la probabilité m de constater, lors d'un contrôle dans un petit village de 100 habitants tous récemment vaccinés, plus d'une personne malade ? (on supposera l'indépendance des éventualités).

Compte tenu des hypothèses, le nombre de malades est ici régi par une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$. On a $np = 2$ et les conditions d'approximation par une loi de Poisson sont réalisées. Soit m la probabilité cherchée ; avec les notations ci-dessus, on a :

$$P(X = k) = e^{-2}\frac{2^k}{k!}$$

donc $1 - m \cong P(X = 0) + P(X = 1) = 0,406$, soit $m \cong 0,6$.

L'application (peu pratique) de la loi binomiale aurait fourni $1 - m = (0,98)^{100} + 2x(0,98)^{99} \cong 0,403$. Soit $m \cong 0,597$. L'approximation est donc ici excellente.

Biographie

Siméon Denis Poisson est né le 27 juin 1781 à Pithiviers. Poisson étudie à l'Ecole Centrale de Fontainebleau, puis il réussit (en première position !) le concours d'entrée à l'Ecole Polytechnique en 1798. Il devient dès son diplôme obtenu répétiteur à l'Ecole Polytechnique, sous la recommandation de Laplace. Il accèdera rapidement au statut de professeur suppléant en 1802, puis complet en 1806, en remplacement de Fourier que Napoléon a nommé Préfet à Grenoble. Il écrivit en 1837 un important mémoire sur les probabilités, Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile, dans lequel apparaît la distribution qui porte désormais son nom (la distribution de Poisson décrit la probabilité qu'un événement ait lieu durant un intervalle de temps donné, pourvu que la probabilité de réalisation d'un événement soit très faible, mais que le nombre d'essais soit très grand). Ce traité ne fut pas tellement remarqué par les contemporains de Poisson, mais eut une grande influence par la suite.

Fiche 31 - Lois usuelles : la suite !

Exercice 1
Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0,1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 1-ère boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2-ième boule blanche. Déterminer $P(X_1 = k \cap X_2 = j)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X_2.

Exercice 2
On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée dont la probabilité d'obtenir "pile" vaut p et celle de "face" vaut q ($p+q = 1$). On lance indéfiniment la pièce et on note X le rang où apparaît pour la première fois deux résultats " pile " consécutifs.

1. Calculer en fonction de p et q : $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = 4)$
2. Montrer que $\forall n \geqslant 3$,
$$P_{(P_1)}(X = n) = qP(X = n - 2)$$
$$P_{(F_1)}(X = n) = P(X = n - 1)$$
3. En déduire que $\forall n \geqslant 3$, $P(X = n) = qP(X = n-1) + pqP(X = n-2)$
4. On suppose à présent que $p = 2/3$ et $q = 1/3$.
   (a) Etablir que $\forall n \geqslant 0$, $P(X = n+1) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$
   (b) Calculer $E(X)$, $E(X(X-1))$ et $V(X)$

Exercice 3
On effectue des lancers successifs de 3 dés cubiques équilibrés : D_1, D_2 et D_3, de manière à obtenir trois 6.
Après le premier lancer, on ne relance donc que les dés qui n'ont pas donnés 6, et ainsi de suite jusqu'à obtenir trois 6.

1. On note X_1 [resp X_2, X_3] la variable aléatoire égale au rang d'apparition du 1er 6 avec le dé D_1 [resp D_2, D_3]. Reconnaître les lois respectives de X_1, X_2 et X_3.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécéssaires à l'obtention des trois 6 suivant le protocole ci dessus.
   (a) Calculer pour tout entier k non nul et pour $i = 1, 2$ ou 3, la valeur de $\mathbb{P}(X_i \leq k)$.
   (b) En déduire pour tout entier k non nul la valeur de $\mathbb{P}(X \leq k)$.
   (c) Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer si elle existe l'espérance mathématique de X.

Exercice 4
Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n^\circ 1$.

1. Calculer $P_{(N=n)}(X = k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. Justifier que $P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X = k) P(N = n)$
3. Montrer que $P(X = k) = e^{-\lambda}(\frac{1}{m})^k \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\lambda\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right)^n$.
4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle)
5. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Programme de Colle 28

Compléments sur les probabilités

- Probabilités totales pour un S.C.E. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(X=i)_{n\in\mathbb{N}}$
- Espérance et variance d'une VAR infinie
- Loi et espérance d'une VAR $f(X)$

Révisions : lois U, B et H

Lois discrètes usuelles

- Loi géométrique (Définition, espérance, variance, exemple caractéristique)
- Loi de Poisson (Définition, espérance, variance, somme)

Révisions : Bijection : points méthodes

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 27

Exercice 1
Le nombre N d'enfants d'une famille d'une population bien définie suit la loi de Poisson de paramètre m. Chaque enfant présente à la naissance la probabilité p d'avoir un caractère génétique bien défini, et ceci de façon indépendante. Soit X le nombre d'enfants d'une famille présentant ce caractère et Y le nombre d'enfants ne le présentant pas.

1. Quelle relation existe-t-il entre N, X, Y ?
2. Pour n dans $\mathbb{N}$ et k dans $[\![0,n]\!]$, déterminer $P_{N=n}(X=k)$.
3. En déduire la loi de probabilité de X. Que remarque-t-on ?
4. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice 2
Soient a et b deux réels tels que $0<a<1$ et $0<b<1$.
On effectue une suite d'expérience aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne "pile" est a, et que la probabilité que la pièce B donne "pile" est b.
Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne "face" pour la première fois, et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne "face" pour la première fois.

1. Quelles sont les lois de probabilités de X et de Y ? Calculer $E(X)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X=Y)$. Interprétation.
3. Trouver, pour $k\in\mathbb{N}$, la valeur de $P(X>k)$.
   En déduire les probabilités $P(X>Y)$ et $P(X\geqslant Y)$. Interprétation.

Exercice 3
Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p\in]0,1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 1-ère boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2-ième boule blanche.
   Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.