Chapitre 23

Probabilités : compléments

23.1 Espaces probabilisés infinis

A l'image d'un espace probabilisé fini, on peut définir un espace probabilisé sur un univers Ω non nécessairement fini. Les événements constituant la tribu peuvent donc être en nombre infini.

Exemple : On lance un dé jusqu'à obtenir un 6. Avec de la malchance, il peut y avoir un temps d'attente infiniment long ! Il faut donc considérer un espace probabilisable où l'univers est construit sur une infinité de lancers successifs.

Définition 23.1 (Espace probabilisé)
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0; 1]$ telle que

1. $P(\Omega) = 1$
2. *Pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathcal{A}$ telle que $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$ alors*

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé et $\forall A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de A.

Remarque : Il nous restera à définir $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ comme la limite quand $N \to +\infty$ de la suite $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} P(A_n)\right)_{N\in\mathbb{N}}$. Cette suite des sommes partielles étant croissante et majorée par 1, elle converge bien !

Définition 23.2 (Evénement négligeable ou presque sûr)
Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit négligeable (ou quasi-impossible) si et seulement si $P(A) = 0$.
Un événement est presque sûr (ou quasi-certain) si et seulement si $P(A) = 1$.

Proposition 23.1 (S. C. E. fini ou infini)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soient I un ensemble fini d'entiers ou $I = \mathbb{N}$ et $(A_n)_{n\in I}$ un système complet d'événements alors on a $\sum\limits_{n\in I} P(A_n) = 1$.

Proposition 23.2 (Suite d'événements)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé

1. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements de $\mathcal{A}$ (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$), alors la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $P(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$*
2. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements de $\mathcal{A}$ (i.e. $A_{n+1} \subset A_n$), alors la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $P(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$*

Exemple : On lance un dé à 6 faces plusieurs fois. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit B_n :"On n'obtient aucun 6 lors des n premiers lancers".
Soit B :"On n'obtient jamais 6".

Calculons les probabilités des événements précédents.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les lancers étant indépendants, on obtient $P(B_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
On a $B = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$.
De plus $B_{n+1} \subset B_n$: si aucun 6 n'est obtenu lors des $n+1$ premiers lancers alors forcément aucun 6 n'a été obtenu lors des n premiers lancers.
Donc $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements.
Finalement $P(B) = P(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$.

23.2 Calculs de probabilités

L'ensemble des connaissances restent vraies. Il nous reste à adapter les formules contenant des sommes : probabilités totales, espérance et variance.

Théorème 23.1 (Probabilités totales)
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements de Ω et si B est un événement, alors on a

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n)$$

Remarque : Une VAR discrète peut désormais prendre un nombre infini de valeurs. Ainsi $(X = i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un S.C.E. auquel on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{X=i}(B)P(X = i)$$

Définition 23.3 (Espérance d'une VAR infinie)
Soit X une var discrète infinie, $E(X)$ existe si et seulement si la série $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k| P\left(X = x_k\right)\right)$ converge et dans ces conditions, on a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k P\left(X = x_k\right)$$

Définition 23.4 (Variance d'une VAR infinie)
Au regard de la formule de Huygens, X une VAR infinie possède une variance si et seulement si X et X^2 possèdent une espérance.
Autement dit si et seulement si $\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|p_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2p_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
Dans ce cas, les formules et définitions déjà vues restent valables.

23.3 VAR f(X)

Exemple : Soit X une VAR finie telle que $X(\Omega) = [\![-3;4]\!]$ et de loi :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{4}{32}$

Soit $f : x \mapsto x^2 - 5$ et on pose $Y = f(X)$.

1. $Y(\Omega) = \{-5;-4;-1;4;11\}$.
2. Par le théorème de transfert,
$$E(Y) = \frac{1}{32}f(-3)+\frac{3}{32}f(-2)+\frac{5}{32}f(-1)+\frac{7}{32}f(0)+\frac{4}{32}f(1)+\frac{6}{32}f(2)+\frac{2}{32}f(3)+\frac{4}{32}f(4)$$
3. Calculons $P(Y=-1)$.
$$\begin{array}{rcl} P\left(Y=-1\right) & = & P\left(f(X)=-1\right) \\ P\left(Y=-1\right) & = & P\left(X^2-5=-1\right) \\ P\left(Y=-1\right) & = & P\left(X^2=4\right) \\ P\left(Y=-1\right) & = & P\left((X=2)\cup(X=-2)\right) \\ \text{par incompatibilité,} & & \\ P\left(Y=-1\right) & = & P(X=2)+P(X=-2) \\ P\left(Y=-1\right) & = & \frac{6}{32}+\frac{3}{32} \\ P\left(Y=-1\right) & = & \frac{9}{32} \end{array}$$

Définition 23.5 (VAR f(X))
Soit X une var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une fonction numérique d'une variable réelle. On note $f(X)$ l'application définie par
$$f(X) : \left\{ \begin{array}{c} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto f(X(\omega)) \end{array} \right.$$

Proposition 23.3 (Loi d'une VAR f(X))
Soit X une var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, f une fonction numérique et $Y = f(X)$.
Y est une var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que

1. *$Y(\Omega) = \{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$*
2. *pour tout $y \in Y(\Omega)$, $P(Y=y) = \sum\limits_{i \text{ tel que } f(x_i)=y} P(X=x_i)$*

Proposition 23.4 (Théorème de Transfert)
Soit X une var sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_k, p_k),\ k\in\mathbb{N}\}$ et f une fonction alors, sous réserve d'existence,
$$E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)p_k$$

Fiche 30 - Probabilités : compléments

Exercice 1

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement 2 boules blanches et 1 noires et 1 blanche et 3 noires. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine.
Au $i^{ème}$ tirage, si la boule obtenue est blanche (resp. noire), le $(i+1)^{ème}$ tirage se fait dans U_1 (resp. U_2).
On considère la variable aléatoire X_i définie par $X_i = 1$ si l'on obtient une boule blanche au $i^{ème}$ tirage et $X_i = 0$ sinon.

1. Donner la loi de X_1 puis de X_2.
2. Calculer $P(X_{i+1} = 0)$ en fonction de $P(X_i = 0)$ et $P(X_i = 1)$. Faire de même avec $P(X_{i+1} = 1)$.
3. Montrer que la suite $(P(X_i = 0))_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire l'expression de $P(X_i = 0)$ en fonction de i puis celle de $P(X_i = 1)$.
4. Calculer $\lim\limits_{i\to+\infty} P(X_i = 0)$.

Exercice 2

On réalise une suite de lancers d'une piéce équilibrée.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient pile (resp. face) au $k^{éme}$ lancer".
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.
2. En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
3. Sur le modéle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'événement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ événements incompatibles.
4. Déterminer $\mathrm{P}(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
5. Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.
6. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.

Exercice 3

On considère deux urnes notées respectivement U et V.
On suppose que :
– l'urne U contient deux boules noires et deux boules blanches ;
– l'urne V contient deux boules noires, deux boules blanches et deux boules vertes.

1. On considère l'expérience suivante $(\mathcal{E})$: ≪ on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne U, on note leur couleur, puis on les remet dans l'urne U ≫.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On répète n fois l'expérience $(\mathcal{E})$ et on note N la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu deux boules de même couleur lors de ces n tirages dans l'urne U.
   (b) Donner la loi de N en explicitant $P(N = k)$ pour k appartenant aux valeurs prises par N.
   (c) Préciser la valeur de l'espérance $E(N)$ de N ainsi que de sa variance $V(N)$.
   (d) Quelle est la probabilité que, sur ces n tirages, on ait obtenu au moins une fois deux boules de même couleur ?
2. On considère une autre expérience $(\mathcal{F})$: ≪ on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne U. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne U. Si elles ont des couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne U puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne U soit vide ≫.
   On note X le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne U soit vide. On désigne par A l'événement : ≪ au premier tirage dans l'urne U, les deux boules sont de même couleur ≫ et on note a sa probabilité, c'est-à -dire $a = \mathbb{P}(A)$.
   (a) Calculer $P(X = 1), P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $P(X = n) = a(1-a)^{n-2}$.
   (c) Calculer, si elle existe, l'espérance de X.
3. On considère deux réels r, s distincts et non nuls ainsi qu'un réel λ. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par :
   $$u_2 = 0, \quad \forall n \geq 2, \quad u_{n+1} = \lambda r^{n-2} + s u_n.$$
   Montrer par récurrence que :
   $$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{\lambda}{r-s}\left(r^{n-2} - s^{n-2}\right)$$
4. On considère une nouvelle expérience $(\mathcal{G})$: ≪ on tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne V. Si les deux boules sont de même couleur, on enlève ces deux boules de l'urne V. Si elles sont de couleurs différentes, on repose les deux boules dans l'urne V puis on recommence l'expérience jusqu'à ce que l'urne V soit vide ≫.
   On note Y le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne V soit vide. On désigne par B l'événement : ≪ au premier tirage dans l'urne V, les deux boules sont de même couleur ≫ et on note b sa probabilité, c'est-à -dire $b = P(B)$.
   (a) Calculer la probabilité b.
   (b) Calculer $P(Y = 2)$ et $P(Y = 3)$.
   (c) A l'aide du système complet d'événements $(B, \overline{B})$, démontrer que, pour tout $n \geq 2$:
   $$P(Y = n+1) = bP(X = n) + (1-b)P(Y = n)$$
   (d) A l'aide de la question 3, montrer que :
   $$\forall n \geq 2, \quad P(Y = n) = \frac{ab}{b-a}\left((1-a)^{n-2} - (1-b)^{n-2}\right)$$
   (e) Calculer la valeur de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} P(Y = n)$.
   (f) Montrer que Y admet une espérance puis calculer $E(Y)$.

Programme de Colle 27

Séries

- Définition de série, convergence, convergence absolue, propriété de linéarité
- Séries de référence (géométrique, exponentielle)

Compléments sur les probabilités

- Probabilités totales pour un S.C.E. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(X=i)_{n\in\mathbb{N}}$
- Espérance et variance d'une VAR infinie
- Loi et espérance d'une VAR $f(X)$

Révisions : lois U, B et H

Exercices possibles Exercices 1 à 3 semaine 26

Exercice 1
On admet que l'égalité $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ est valable pour $x\in]-1,1[$ et $k\in\mathbb{N}$.
Soit p un nombre réel tel que $0<p<2/3$. Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est de $p^n/2$ quand $n\geqslant 1$; par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est de $1/2$.

1. Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant.
   Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.
2. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$. On considère une famille de n enfants ; calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.
3. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.
4. Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

Exercice 2
On désigne par x un nombre réel appartenant à $]0,1[$. N et n sont des 2 nombres entiers naturels non nuls. On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir "pile" lors d'un jet est $1-x$ et que la probabilité d'obtenir "face" est x. Les jets sont supposés indépendants.

On désigne enfin par S_n le nombre de fois où l'on a obtenu pile au cours des n premiers jets, par T_n le numéro du jet où l'on obtient pile pour la n-ième fois.

1. Préciser la loi de S_n. Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
2. Préciser la loi de T_1. Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire. Pour la variance, on commencera par calculer $E(T_1.(T_1-1))$.
3. L'objet de cette question est de calculer l'espérance de T_r. Soit k un nombre entier naturel et r un nombre entier naturel non nul.
   (a) Montrer que l'événement $\{T_r=k+r\}$ est réalisé si et seulement si les événements $\{S_{k+r-1}=r-1\}$ et "pile est obtenu au $(k+r)$-ième jet" le sont. En déduire la loi de T_r.
   (b) Vérifier que la somme des probabilités des événements $\{Tr=k+r\}$, où k appartient à $\mathbb{N}$, est égale à 1. Calculer l'espérance de T_r. On admettra que la série de terme général $\binom{r+k}{r}.x^k$, k appartenant à $\mathbb{N}$, est convergente, de somme $\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$, et on rappelle que $p\binom{N}{p}=N.\binom{N-1}{p-1}$, pour tout N,p appartenant à $\mathbb{N}^*$.
4. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1. Un joueur parle de la façon suivante. Lors du n-ième jet, il mise 1 euro.
   – Si "pile" sort, il reçoit la somme a (en euros), et il perd sa mise ;
   – sinon, il perd sa mise.
   On désigne par G_n la somme des profits et pertes (celles-ci étant comptées négativement) du joueur après son n-ième succès (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro T_n).
   (a) Montrer que $G_1=a-T_1$ et calculer l'espérance de G_1.
   (b) Plus généralement, pour tout nombre entier naturel non nul r, exprimer G_r en fonction de T_r et en déduire l'espérance de G_r
   (c) Étudier la limite de G_r quand r tend vers $+\infty$.