

Chapitre 22

Séries

22.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 22.1 (Séries)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite.

On appelle série de terme général u_k la suite S définie par $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et on la note traditionnellement $\sum_{k \geq 0} u_k$.

(S_n) est appelée la suite des sommes partielles.

Définition 22.2 (Convergence)

Dire que la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge signifie que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ converge.

Dire que la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ diverge signifie que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ diverge.

Définition 22.3 (Somme)

Soit $\sum_{k \geq 0} u_k$ une série convergente.

On note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la limite finie de la suite S et on l'appelle somme de la série $\sum_{k \geq 0} u_k$.

Remarque :

- $\sum_{k=0}^n u_k$: terme de rang n de la Sdtg $u_k : S_n$.
- $\sum_{k \geq 0} u_k$: Sdtg $u_k : (S_n)$.
- $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$: somme de la Sdtg $u_k : \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exemple :

Calculer les 4 premiers termes de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k}$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

La suite des sommes partielles (S_n) converge vers $\frac{3}{2}$.

Donc la série de terme général $\frac{1}{3^k}$ converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$.

Proposition 22.1 (Opérations sur les séries)

Soit λ un nombre réel et soient $\sum_{k \geq 0} u_k$ et $\sum_{k \geq 0} v_k$ deux séries convergentes alors

- la série $\sum_{k \geq 0} (u_k + v_k)$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
- la série $\sum_{k \geq 0} \lambda u_k$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Définition 22.4 (Convergence absolue)

Dire que la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ est absolument convergente signifie que la série $\sum_{k \geq 0} |u_k|$ est convergente.

Proposition 22.2 (Convergence absolue et convergence)

Si la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ est absolument convergente alors la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ est convergente.

Exemple :

$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{3^k}$ est absolument convergente car $\sum_{k \geq 1} \left| \frac{(-1)^k}{3^k} \right| = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{3^k}$ qui est une série convergente. Donc on en déduit que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{3^k}$ est convergente.

Remarque : On obtient la convergence de la série mais pas la valeur de la somme.

22.2 Séries de références

Rappel :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout nombre réel q différent de 1, on a $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

**Proposition 22.3 (Séries géométriques)**

La série $\sum_{k \geq 0} q^k$ (resp. $\sum_{k \geq 1} kq^{k-1}$, resp. $\sum_{k \geq 2} k(k-1)q^{k-2}$) est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Proposition 22.4 (Série exponentielle)

Pour tout nombre réel x , la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ est convergente

et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.



Point Méthode : Soit la série de terme général $\frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k}$.

$\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^N \frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k} &= \sum_{k=0}^N \frac{2k(k-1) + 2k + 3k + 5}{2^k} \\
 \sum_{k=0}^N \frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k} &= \sum_{k=0}^N \frac{2k(k-1) + 5k + 5}{2^k} \\
 \sum_{k=0}^N \frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k} &= \sum_{k=0}^N \frac{2k(k-1)}{2^k} + \sum_{k=0}^N \frac{5k}{2^k} + \sum_{k=0}^N \frac{5}{2^k} \\
 \sum_{k=0}^N \frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k} &= \sum_{k=0}^N \frac{1}{2} \times \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \sum_{k=0}^N \frac{5}{2} \times \frac{k}{2^{k-1}} + \sum_{k=0}^N 5 \times \frac{1}{2^k} \\
 \sum_{k=0}^N \frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{5}{2} \sum_{k=0}^N k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + 5 \sum_{k=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^k
 \end{aligned}$$

Les séries de termes généraux $k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$, $k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ sont convergentes car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

Dès lors la série de terme général $\frac{2k^2+3k+5}{2^k}$ converge et sa somme vaut :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \frac{5}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} + 5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \\
 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k} &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}} + 5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \\
 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k^2 + 3k + 5}{2^k} &= \frac{1}{2} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{5}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} + 5 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$



Point Méthode : Soit la série de terme général $\frac{2k^2+3k+5}{k!}$.

$\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^N \frac{2k^2 + 3k + 5}{k!} &= \sum_{k=0}^N \frac{2k(k-1) + 2k + 3k + 5}{k!} \\
 \sum_{k=0}^N \frac{2k^2 + 3k + 5}{k!} &= \sum_{k=0}^N \frac{2k(k-1)}{k!} + \frac{5k}{k!} + \frac{5}{k!} \\
 \sum_{k=0}^N \frac{2k^2 + 3k + 5}{k!} &= 2 \sum_{k=0}^N \frac{k(k-1)}{k!} + 5 \sum_{k=0}^N \frac{k}{k!} + 5 \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \\
 \sum_{k=0}^N \frac{2k^2 + 3k + 5}{k!} &= 2 \left(0 + 0 + \sum_{k=2}^N \frac{1^{k-2}}{(k-2)!} \right) + 5 \left(0 + \sum_{k=1}^N \frac{1^{k-1}}{(k-1)!} \right) + 5 \sum_{k=0}^N \frac{1^k}{k!} \\
 \sum_{k=0}^N \frac{2k^2 + 3k + 5}{k!} &= 2 \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1^i}{i!} + 5 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1^j}{j!} + 5 \sum_{k=0}^N \frac{1^k}{k!}
 \end{aligned}$$

La série de terme général $\frac{1^k}{k!}$ converge.

Dès lors la série de terme général $\frac{2k^2+3k+5}{k!}$ converge et sa somme vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k^2 + 3k + 5}{k!} &= 2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1^i}{i!} + 5 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1^j}{j!} + 5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k^2 + 3k + 5}{k!} &= 2e^1 + 5e^1 + 5e^1 \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k^2 + 3k + 5}{k!} &= 12e\end{aligned}$$

Fiche 29 - Séries

Exercice 1

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{5^n} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 5n}{5^n}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n}, \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} \end{array} \right|$$

Exercice 2

Justifier la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1. Pour $k \geq 0$, $u_k = (2k+1) \left(-\frac{1}{2}\right)^k$
2. Pour $k \geq 0$, $u_k = (k^2 + k + 1) \left(\frac{1}{3}\right)^k$
3. Pour $k \geq 0$, $u_k = (4k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$
4. Pour $k \geq 1$, $u_k = (2k^2 - 2k + 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$
5. Pour $k \geq 0$, $u_k = (3k+2) \left(\frac{1}{4}\right)^{k+2}$

Exercice 3

Justifier la convergence et calculer la somme des séries de terme général, $k \in \mathbb{N}$:

$$\left| \begin{array}{l} u_k = \frac{2k-1}{k!} \\ u_k = \frac{2k^2 - 3k + 1}{k!} \\ u_k = \frac{k^2}{(k+1)!} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} u_k = \frac{3k^2 - 2k + 1}{k!} \\ u_k = \frac{k + 2^k}{k!} \\ u_k = \frac{k^2 - 2k + 3}{k!} (-3)^k \end{array} \right|$$

Exercice 4

Soit $u_p = \frac{1}{(2p-1)(2p+1)}$, p entier naturel non nul.

1. Déterminer a et b tels que $u_p = \frac{a}{2p-1} + \frac{b}{(2p+1)}$.
2. Calculer $S_n = \sum_{p=1}^n u_p$.
3. En déduire la somme de la série de terme général $u_p, p \geq 1$.

Exercice 5

Pour n, k entiers naturels non nuls, on pose

$$u_k = 1/k, \quad U_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $x \geq \ln(1+x)$.
2. En déduire $U_n \geq \ln(n+1)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$.
3. On pose $v_k = u_k - u_{k+1}$ et $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$.
 - (a) Exprimer V_n en fonction de u_{n+1} et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n)$.
 - (b) En déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On pose $w_k = v_k - v_{k+1}$ et $W_n = \sum_{k=1}^n w_k$.
 - (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n)$.
 - (b) En déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6

On admet, pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0; 1[$, que la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note

$$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

1. Vérifier, pour tout réel x de $[0; 1[$, $s_0(x) = \frac{1}{1-x}$ et $s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
2. Pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tel que $k < n$, montrer : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
3. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0; 1[$, déduire de la question précédente que $s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$.
4. Montrer, par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0; 1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Programme de Colle 26

Chaîne de Markov

Révisions : probabilités et VAR

- Poincaré, composées, totales. Loi d'une VAR, fonction de répartition. Formules de calcul de l'espérance et de la variance.

Séries

- Définition de série, convergence, convergence absolue, propriété de linéarité
- Séries de référence (géométrique, exponentielle)

Exercices possibles Exercices 1 à 6 semaine 25

Exercice 1

Justifier la convergence et calcule la somme des séries suivantes dont le terme général est :

1. Pour $k \geq 0$,

$$u_k = (3k) \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

2. Pour $k \geq 0$,

$$u_k = (2k - 3) \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

3. Pour $k \geq 0$,

$$u_k = (k^2) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

4. Pour $k \geq 1$,

$$u_k = (k^2 + 1) \left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$$

5. Pour $k \geq 0$,

$$u_k = (3k - 2) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}$$

Exercice 2

Justifier la convergence et calcule la somme des séries suivantes :

- 1.

$$u_k = \frac{3}{k!}$$

- 2.

$$u_k = \frac{2k + 1}{k!}$$

- 3.

$$u_k = \frac{k^2}{(k)!}$$

- 4.

$$u_k = \frac{k + 3^k}{k!}$$

- 5.

$$u_k = \frac{k^2 - k}{k!}$$

- 6.

$$u_k = \frac{k^2 + 1}{k!} (2)^k$$