Chapitre 21

Chaînes de Markov

Reprenons un exercice de l'épreuve **ISCID T 1991** pour détailler un exemple complet d'exercice contenant un processus aléatoire répété dont chaque itération ne dépend de manière probabiliste que de la précédente.

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) Prouver que P est inversible et calculer la matrice P^{-1}.

   Résolution : On trouve P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & -4 \\ -12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

   (b) Calculer la matrice $P^{-1}AP$

   Résolution : On trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. On donne les matrices $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer JK et KJ. Calculer J^n et K^n pour tout entier naturel n. Ecrire B à l'aide de J et de K; en déduire B^n pour tout entier naturel n.

   Résolution : On trouve $JK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $KJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   J étant une matrice diagonale, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N},\ J^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$,
   et par récurrence, on peut démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\},\ K^n = 0_3$.
   On a de plus $B = K + J$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ B^n = (K + J)^n$.
   On sait par ailleurs que K et J commutent.

Par le binôme de Newton, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

$$\begin{array}{rcl} B^n & = & \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} K^k J^{n-k} \\ & & \text{or } \forall i \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ K^i = 0_3 \\ B^n & = & \sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} K^k J^{n-k} \\ B^n & = & \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} K^0 J^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} K^1 J^{n-1} \\ B^n & = & I_3 J^n + nKJ^{n-1} \\ B^n & = & J^n + nKJ^{n-1} \\ B^n & = & \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Prouver, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PB^nP^{-1}$$

Résolution : Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.

- Initialisation : $A^0 = I_3$ et $PB^0P^{-1} = I_3$.
- Hérédité : Supposons qu'à un certain rang n, on ait $A^n = PB^nP^{-1}$. Montrons alors qu'au rang $n+1$, on a $A^{n+1} = PB^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{array}{rcl} A^{n+1} & = & A^n \times A \\ A^{n+1} & = & PB^nP^{-1} \times PBP^{-1} \\ A^{n+1} & = & PB^nI_3BP^{-1} \\ A^{n+1} & = & PB^{n+1}P^{-1} \end{array}$$

  L'hérédité est démontrée.
- Conclusion : Par le principe de récurrence, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5^n + (-6n+8)2^n & 5^n + (3n-1)2^n & 5^n - (\frac{3}{2}n+1)2^n \\ 4 \times 5^n - (6n+4)2^n & 4 \times 5^n + (3n+5)2^n & 4 \times 5^n - (\frac{3}{2}n+4)2^n \\ 4 \times 5^n + (12n-4)2^n & 4 \times 5^n - (6n+4)2^n & 4 \times 5^n + (3n+5)2^n \end{pmatrix}$$

Résolution : Il suffit pour cela de poser le calcul.

3. Un jeton est placé sur la case 2 d'une planchette contenant trois cases numérotées de gauche à droite $1, 2, 3$.
   Le déplacement du jeton sur la planchette est régi par l'expérience suivante. On tire avec remise une boule d'une urne contenant quatre boules blanches et une boule noire.
   – Si la boule tirée est blanche, on déplace le jeton de deux cases vers la droite, ou, si ce déplacement est impossible, on laisse le jeton où il se trouve.
   – Si la boule tirée est noire, on déplace le jeton d'une case vers la gauche, ou, si le déplacement est impossible, on laisse le jeton là où il se trouve.
   Pour n entier naturel non nul, on note les événements

– A_n : "le jeton après n tirages dans l'urne se trouve dans la case 1"
– B_n : "le jeton après n tirages se trouve dans la case 2"
– C_n : "le jeton après n tirages se trouve dans la case 3"
et aussi A_0, B_0, C_0 concernant la situation avant le premier tirage.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = P(A_n)$, $\quad b_n = P(B_n)$, $\quad c_n = P(C_n)$, $\quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

(a) Préciser les probabilités des événements A_0, B_0 et C_0.

Résolution : Un jeton est placé sur la case 2 d'une planchette donc $P(A_0) = 0$, $P(B_0) = 1$, $P(C_0) = 0$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

Résolution : Soit $n \in \mathbb{N}$, A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements auquel on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}
P(A_{n+1}) & = & P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n) \\
P(A_{n+1}) & = & P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) \times P(C_n) \\
P(A_{n+1}) & = & \frac{1}{5}P(A_n) + \frac{1}{5}P(B_n) + 0 \times P(C_n) \\
a_{n+1} & = & \frac{1}{5}\left(a_n + b_n\right)
\end{array}$$

De même

$$\begin{array}{rcl}
P(B_{n+1}) & = & P(B_{n+1} \cap A_n) + P(B_{n+1} \cap B_n) + P(B_{n+1} \cap C_n) \\
P(B_{n+1}) & = & P_{A_n}(B_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1}) \times P(C_n) \\
P(B_{n+1}) & = & 0 \times P(A_n) + \frac{4}{5}P(B_n) + \frac{1}{5} \times P(C_n) \\
b_{n+1} & = & \frac{1}{5}\left(4b_n + c_n\right)
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}
P(C_{n+1}) & = & P(C_{n+1} \cap A_n) + P(C_{n+1} \cap B_n) + P(C_{n+1} \cap C_n) \\
P(C_{n+1}) & = & P_{A_n}(C_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1}) \times P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1}) \times P(C_n) \\
P(C_{n+1}) & = & \frac{4}{5}P(A_n) + 0 \times P(B_n) + \frac{4}{5} \times P(C_n) \\
c_{n+1} & = & \frac{1}{5}\left(4a_n + 4c_n\right)
\end{array}$$

(c) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \dfrac{1}{5}AU_n$, où A est la matrice définie dans la partie A.

Résolution : Il suffit de poser le calcul.

(d) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{5^n}A^nU_0$.

Résolution : Une rapide démonstration par récurrence suffit.

(e) En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n et trouver les limites a, b et c des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Résolution : En posant le calcul , on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a_n & = & \frac{1}{9} + \frac{3n-1}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^n \\
b_n & = & \frac{4}{9} + \frac{3n+5}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^n \\
c_n & = & \frac{4}{9} - \frac{6n+4}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^n
\end{array}\right.$$

Fiche 28 - Chaînes de Markov

Exercice 1 (ISCID T 1991)

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Prouver que P est inversible et calculer la matrice P^{-1}.
   (b) Calculer la matrice $P^{-1}AP$
2. On donne les matrices $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer JK et KJ. Calculer J^n et K^n pour tout entier naturel n. Ecrire B à l'aide de J et de K; en déduire B^n pour tout entier naturel n.
   (b) Prouver, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PB^nP^{-1}$
   (c) En déduire A^n pour tout entier naturel n.
3. Un jeton est placé sur la case 2 d'une planchette numérotées de gauche à droite $1, 2, 3$.
   Le déplacement du jeton sur la planchette est régi par l'expérience suivante. On tire avec remise une boule d'une urne contenant quatre boules blanches et une boule noire.
   – Si la boule tirée est blanche, on déplace le jeton de deux cases vers la droite, ou, si ce déplacement est impossible, on laisse le jeton où il se trouve.
   – Si la boule tirée est noire, on déplace le jeton d'une case vers la gauche, ou, si le déplacement est impossible, on laisse le jeton là où il se trouve.

   Pour n entier naturel non nul, on note A_n : "Le jeton après n tirages dans l'urne se trouve dans la case 1", B_n : "Le jeton après n tirages dans l'urne se trouve dans la case 2", C_n : "Le jeton après n tirages dans l'urne se trouve dans la case 3", et A_0, B_0, C_0 concernant la situation avant le premier tirage.
   Pour n entier naturel, on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   (a) Préciser les probabilités des événements A_0, B_0 et C_0.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (c) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \dfrac{1}{5}AU_n$.
   (d) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{5^n}A^nU_0$.
   (e) En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 2

Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge, passe au vert avec la probabilité p, et, lorsqu'il est vert, passe au rouge avec la probabilité q $(0 < p < 1$ et $0 < q < 1)$. On note r_n (respectivement v_n) la probabilité que ce feu soit au rouge (respectivement au vert) à l'instant $t = n$.

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $r_{n+1} = (1-p)r_n + qv_n$ et $v_{n+1} = pr_n + (1-q)v_n$.
2. En déduire l'existence d'une matrice carrée A d'ordre 2 telle que $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$ puis que $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} B + C = I \\ B + (1-p-q)C = A \end{cases}$.
4. Calculer B^2, C^2, BC et CB.
5. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
6. En déduire les valeurs de r_n et v_n en fonction de n, r_0 et v_0 puis les limites éventuelles des suites (r_n) et (v_n).

Programme de Colle 25

Applications des intégrales

- Positivité de l'intégrale. Inégalité de la moyenne.
- Point méthode : *fonction définie par une intégrale.*
- Aire d'une surface et intégrale.

Révisions : points méthodes sur la continuité et la dérivabilité

Chaîne de Markov

Révisions : probabilités et VAR

- Poincaré, composées, totales. Loi d'une VAR, fonction de répartition. Formules de calcul de l'espérance et de la variance.

Exercices possibles Exercices 1 à 2 semaine 24

Exercice 1

Deux pièces A et B sont reliées entre elles par une porte ouverte. Seule la pièce B possède une issue vers l'extérieur. Une guêpe initialement dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. Son trajet obéit aux règles suivantes :

- Lorsqu'elle est en A au temps $t = n$, alors, au temps $t = n + 1$, elle reste en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, ou elle passe en B avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$
- Lorsqu'elle est en B au temps $t = n$, alors, au temps $t = n+1$, elle retourne en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$, ou elle reste en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ou elle sort à l'air libre avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

Au temps $t = 0$, la guêpe est en A. Lorsqu'elle sort à l'air libre, elle ne revient plus.
On note $\mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{B}_n$, resp. $\mathcal{S}_n$) les événements : "à l'instant $t = n$, elle est en A (resp. en B, resp. elle sort)", et a_n, b_n, s_n leurs probabilités respectives.

1. Calculer a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1.
2. On pose $Z_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Expliciter une matrice M telle que $Z_{n+1} = MZ_n$ puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n = M^n Z_0$
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $3P^2 - 9P + 10I_2 = 0_2$. En déduire que P est inversible et expliciter son inverse
4. Déterminer une matrice H telle que $H = P^{-1}MP$, calculer H^n
5. Exprimer H^n en fonction de P et M^n.
   En déduire les 4 coefficients de la matrice M^n.
6. Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
7. Justifier que $\forall n \geqslant 2$, $s_n = \dfrac{1}{4} b_{n-1}$. En déduire s_n en fonction de n.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$
2. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe des réels a_n et b_n tels que :
   $A^n = a_n A^2 + b_n A$ avec $\left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & b_n + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2} a_n \end{array} \right.$.
   Donner a_1 et b_1
3. Montrer que pour tout n non nul : $a_n + b_n = 1$.
   En déduire que : $b_{n+1} = -\frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2}$
4. Exprimer alors b_n et $a_n$en fonction de n.
5. Un point lumineux se déplace sur les sommets d'un triangle ABC selon le protocole suivant :
   - A l'instant 0, le point lumineux se situe en A
   - Si à l'instant $n \in \mathbb{N}$, le point lumineux est en A, à l'instant $n + 1$ il est en B
   - Si à l'instant $n \in \mathbb{N}^{\times}$, le point lumineux est en B, à l'instant $n + 1$ il est en A avec la probabilité $\frac{1}{4}$, en B avec la probabilité $\frac{1}{2}$, en Cavec la probabilité $\frac{1}{4}$.
   - Si à l'instant $n \in \mathbb{N}^{\times} \backslash \{1\}$ le point lumineux est en C, à l'instant $n+1$ il est en B.

   On note A_n l'évènement " le point lumineux se trouve à l'instant n sur le sommet A", de même pour B_n et C_n. On note U_n la matrice colonne : $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.
   Préciser U_0 et U_1.
6. Utiliser la formule des probabilités totales et montrer que : $U_{n+1} = AU_n$
7. En déduire que pour tout entier n non nul : $U_n = A^n U_0$. Préciser U_2, puis montrer que : $U_n = a_n U_2 + b_n U_1$.
8. En déduire les probabilités $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n.