Chapitre 19

Matrices Inversibles

19.1 Définition

Définition 19.1 (Matrice inversible et inverse)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Dire que A *est inversible signifie qu'il existe* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n$$

Dans ce cas, la matrice B *est appelée inverse de* A *et on la note* A^{-1}
L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est noté* $GL_n(\mathbb{R})$.

Remarque : En pratique, il suffira d'obtenir $AB = I_n$. La seconde égalité est en réalité superflue.

Proposition 19.1 (Inverse de matrices particulières)

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, I_n *est inversible et*
$$I_n^{-1} = I_n$$
- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et soit* D *une matrice carrée d'ordre* n *diagonale dont tous les termes diagonaux sont non nuls :*

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \text{ Alors } D \text{ inversible et } D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

Proposition 19.2 (Propriétés de calcul)
Soient A, B, C *des matrices carrées de taille* n.

1. - *Si* A *est inversible alors* A^{-1} *aussi et* $(A^{-1})^{-1} = A$
   - *Si* A *et* B *sont inversibles alors* AB *aussi et* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
   - *Si* $A \neq 0_n$ *et* $B \neq 0_n$ *et* $AB = 0_n$ *alors* A **et** B *ne sont pas inversibles.*
2. *Supposons que* C *soit inversible.*
   - *Si* $AC = BC$ *alors* $A = B$
   - *Si* $CA = CB$ *alors* $A = B$
   - *Si* $AC = B$ *alors* $A = BC^{-1}$
   - *Si* $CA = B$ *alors* $A = C^{-1}B$

Preuve :
Soient $A \neq 0_n$ et $B \neq 0_n$ et $AB = 0_n$.
Montrons que A **et** B ne sont pas inversibles en utilisant une démonstration par l'absurde.
Supposons dès lors que l'une des deux soit inversible, mettons A !

$$AB = 0_n$$

Multiplions à gauche les deux membres par A^{-1},

$$A^{-1}AB = A^{-1}0_n$$

$$B = 0_n$$

Cette dernière assertion est en contradiction avec $B \neq 0_n$.
L'hypothèse de départ est donc absurde, A n'est pas inversible.
Le raisonnement aurait été le même en considérant au départ non pas A inversible mais B.
Finalement A **et** B ne sont pas inversibles. ■

19.2 Lien avec les systèmes linéaires

Proposition 19.3 (Systèmes linéaires et matrices)
Soient (S) un système $n \times p$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ainsi que $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définies par

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + .. + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + .. + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + .. + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Déterminer X dans l'équation $AX = B$ revient à résoudre le système (S).
La matrice A est appellée la matrice du système (S)

Théorème 19.1 (Systèmes et Matrices inversibles)
Soit (S) un système carré et A la matrice de ce système.

1. *(S) est un système de Cramer si et seulement si la matrice A de (S) est inversible*
2. *Par conséquent, une matrice carrée triangulaire est inversible si et seulement si tous les coefficients de sa diagonale sont non-nuls.*

Théorème 19.2 (Pivot de Gauss)

1. *On peut trouver un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en une matrice B triangulaire supérieure. Dès lors A est inversible si et seulement si B l'est.*

2. *Supposons que $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors on peut trouver un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en I_n.*
   En appliquant ces mêmes transformations élémentaires dans le même ordre à la matrice I_n, la matrice obtenue est A^{-1}

Exemple : Etudions l'inversibilité de A et le cas échéant, calculons son inverse par la méthode du pivot de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \\ L_2 & 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 & 2L_3 - L_1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \\ \\ L_3 & L_3 + L_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{matrix}$

La matrice A a été transformée en une matrice triangulaire dont les coefficents diagonaux sout tous non-nuls.
Donc A est inversible.

$\begin{matrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 4 & 14 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} L_1 & 2L_1 - 3L_3 \\ L_2 & 2L_2 + L_3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 14 & -6 & -6 \\ -10 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} L_1 & 3L_1 + 7L_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -28 & 24 & -4 \\ -10 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} L_1 & \frac{1}{12}L_1 \\ L_2 & -\frac{1}{6}L_2 \\ L_3 & \frac{1}{2}L_3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix}$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour s'assurer que l'on ait pas fait d'erreurs, on calcule AA^{-1} afin de vérifier que $AA^{-1} = I_3$

Remarque : Appliquer un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en I_n revient à multiplier A à gauche par une matrice B inversible.
Ainsi $BA = I_n$. Par définition de l'inversibilité, on obtient que A est inversible, d'inverse B.
Dans la seconde colonne, les mêmes opérations sur les lignes ont été appliquées à I_n, autrement dit, en bas de la seconde colonne, on trouve BI_n id est B, l'inverse de A !

19.3 Méthodes pour obtenir une inverse

Comment démontrer qu'une matrice A est inversible ? :

1. A est une matrice diagonale ou triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.
2. A est le produit de matrices inversibles.
3. Il existe une matrice B telle que $AB = I_n$, alors $A^{-1} = B$.
4. Existe-t-il une expression factorisable par A et égale à I_n ? Dans ce cas l'autre facteur est l'inverse de A.
5. Le pivot de Gauss... (le plus gourmand en calcul et donc le plus hasardeux)

Exemple :

- Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que

$$2A^2 - 3A + 4I = 0_n$$

Alors $4I = 3A - 2A^2$, d'où

$$I = A \times \left(\frac{1}{4}(3I - 2A)\right)$$

Finalement A est inversible, d'inverse $\frac{1}{4}(3I - 2A)$.

- Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que

$$A^3 - 3A^2 + A = 0_n \text{ avec } \left(A^2 - 3A + I\right) \neq 0_n$$

Alors $A\left(A^2 - 3A + I\right) = 0_n$.
Supposons A inversible alors $A^{-1}A\left(A^2 - 3A + I\right) = A^{-1}0_n$
d'où $\left(A^2 - 3A + I\right) = 0_n$, ce qui est absurde d'après les données.
Par conséquent A n'est pas inversible.

19.4 Application au calcul de A^n

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

L'objectif est de calculer $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n.

1. Montrons que P est inversible et déterminons P^{-1}.

$$PQ = 2I_3 \text{ donc } P \times \left(\frac{1}{2}Q\right) = I_3$$

On obtient que P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Calculons $D = P^{-1}AP$.
   On obtient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
   Dans ce type de démarche, ce résultat est forcément une matrice diagonale.
3. Exprimons A en fonction de D, P et P^{-1}.

$$\begin{array}{rcl} D & = & P^{-1}AP \\ PD & = & PP^{-1}AP \\ PD & = & AP \\ PDP^{-1} & = & APP^{-1} \\ PDP^{-1} & = & A \end{array}$$

4. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   - Initialisation : $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = I_3$.
   - Hérédité : Supposons qu'à un certain rang n, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$. Montrons alors qu'au rang $n+1$, on a $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{array}{rcl} A^{n+1} & = & A^n \times A \\ A^{n+1} & = & PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ A^{n+1} & = & PD^nI_3DP^{-1} \\ A^{n+1} & = & PD^{n+1}P^{-1} \end{array}$$

   L'hérédité est démontrée.
   - Conclusion : Par le principe de récurrence, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Calculons $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n.
   Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$
   Il reste à expliciter le produit PD^nP^{-1}. On obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+6^n}{2} & \frac{6^n-4^n}{2} & \frac{4^n-6^n}{2} \\ \frac{6^n-2^n}{2} & \frac{2^n+6^n}{2} & \frac{2^n-6^n}{2} \\ \frac{4^n-2^n}{2} & \frac{2^n-4^n}{2} & \frac{2^n+4^n}{2} \end{pmatrix}$$

Fiche 26 - Inverse de matrices

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^2 - A - 2I = 0_3$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - A$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 4 & 5 & -4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 + 2A$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^3 autrement dit $A \times A \times A$.
2. En déduire que la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 5
Résoudre par rapport à x, y, z le système

$$(S) : \begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$$

En déduire que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 6
Inverser la matrice A associée au système donné puis en déduire la résolution du système.

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ -x + 2y + 2z = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 7

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et explicter A^n.

Exercice 8
Même exercice que précédemment avec

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & 2 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \; P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9
Soit u définie par $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}. Que vaut $P^{-1}AP$?
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D. En déduire D^n.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $D^n = P^{-1}A^nP$. En déduire les coefficients de A^n.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.
   (c) Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Programme de Colle 23

Comparaison de fonctions

- Définition d'équivalence et de négligeabilité.
- Equivalents de référence.
- Propriétés de calcul sur les équivalents.
- Définition d'équivalence pour les suites.

Révisions : limites

- Limites particulières
- Branches infinies

Matrices inversibles

- Définition, inverse de I_n, d'une matrice diagonale.
- Propriétés de calcul.
- Matrice de système, *méthode : pivot de Gauss.*
- *Méthodes pour obtenir l'inversibilité ou l'inverse.*
- *méthode : calcul de* A^n

Exercices possibles Exercices 1 à 9 semaine 22

Exercice 1
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - A$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 2
Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et le cas échéant déterminer son inverse.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3
Inverser la matrice A associée au système donné puis en déduire la résolution du système.

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ -x + y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

Exercice 4
Soient a, b deux réels. On pose $P = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer PQ.
2. Montrer que si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Qu'en est-il si $(a, b) = (0, 0)$?

Exercice 5
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter A^n.