Chapitre 17

Sommes

17.1 Symbole de sommations

Définition 17.1 (Intervalle d'entiers)
Soient n et p deux entiers avec $n \leq p$.
On désigne par $[\![n;p]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre n et p.

Remarque :

1. **Il y a n nombres entiers dans l'ensemble $[\![1;n]\!]$.**
2. $[\![0;n]\!] = \{0\} \cup [\![1;n]\!]$, donc il y a $n+1$ nombres entiers dans l'ensemble $[\![0;n]\!]$.
3. $[\![1;n+1]\!] = [\![1;n]\!] \cup \{n+1\}$, donc il y a $n+1$ nombres entiers dans l'ensemble $[\![0;n]\!]$.
4. Plus généralement, il y a $p-n+1$ entiers dans l'ensemble $[\![n;p]\!]$.

Définition 17.2 (Somme)

1. *Soient $a_0,\ a_1, \cdots,\ a_n$, $(n+1)$ nombres réels.*
   La notation symbolique
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k$$
   désigne la somme
   $$a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
   et elle se prononce "somme de $k=0$ à n des a_k".
2. *Plus généralement, si $a_n,\ a_{n+1}, \cdots,\ a_p$ sont des nombres réels, avec $n \leq p$.*
   La notation symbolique $\sum\limits_{k=n}^{p} a_k$ désigne la somme $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_p$ et elle se prononce "somme de $k=n$ à p des a_k".

On pourra utiliser l'écriture avec le symbole somme ou avec les pointillés.

Exemple :

1. $\ln(2) + \ln(3) + .. + \ln(12)$ peut s'écrire aussi $\sum\limits_{k=2}^{12} \ln(k)$.
2. $5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + \cdots + 25^2$ peut s'écrire $\sum\limits_{k=5}^{25} k^2$.

3. **Question** : que représente la notation symbolique $\sum\limits_{k=1}^{29} \dfrac{1}{7k^2}$?

   Réponse : $\dfrac{1}{7 \times 1^2} + \dfrac{1}{7 \times 2^2} + \dfrac{1}{7 \times 3^2} + .. + \dfrac{1}{7 \times 29^2}$.

Remarque :

- $\sum\limits_{k=0}^{0} a_k = a_0$,
- $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$, $\sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n+1$, $\sum\limits_{k=0}^{n+1} 1 = n+2$,
- $\sum\limits_{k=1}^{n} 2 = 2n$.

Proposition 17.1 (Propriétés de calcul)
Soient n, p deux entiers naturels avec $n \leq p$ et $a_n, a_{n+1}, .., a_p$ et $b_n, b_{n+1}, .., b_p$ des nombres réels. Alors on a

1. $\sum\limits_{k=n}^{p} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=n}^{p} a_k + \sum\limits_{k=n}^{p} b_k$
2. $\sum\limits_{k=n}^{p} (a_k - b_k) = \sum\limits_{k=n}^{p} a_k - \sum\limits_{k=n}^{p} b_k$
3. *Pour tout nombre réel λ,* $\sum\limits_{k=n}^{p} \lambda a_k = \lambda \sum\limits_{k=n}^{p} a_k$
4. ***Relation de Chasles.***
   Pour tout entier positif $l \in [\![n;\ p-1]\!]$, on a

$$\sum_{k=n}^{p} a_k = \sum_{k=n}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{p} a_k$$

Preuve :
On ne prouvera que la première égalité, les autres se prouvant de la même façon.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{p} (a_k + b_k) &= (a_n + b_n) + (a_{n+1} + b_{n+1}) + ..(a_p + b_p) \\ &= (a_n + a_{n+1} + ..a_p) + (b_n + b_{n+1} + ..b_p) \\ &= \sum_{k=n}^{p} a_k + \sum_{k=n}^{p} b_k. \end{aligned}$$

■

17.2 Calcul de sommes

Proposition 17.2 (Sommes remarquables)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a les égalités suivantes :

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. *pour tout nombre réel q différent de 1, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Point Méthode :

1. Calculons $\sum\limits_{k=1}^{10}(5k^2+10k+5)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10}(5k^2+10k+5) &= 5\sum_{k=1}^{10}k^2+10\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}5\\
\sum_{k=1}^{10}(5k^2+10k+5) &= 5\tfrac{(10)(10+1)(2\times 10+1)}{6}+10\tfrac{10(10+1)}{2}+5\times 10\\
\sum_{k=1}^{10}(5k^2+10k+5) &= 1425
\end{aligned}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$, calculons $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{2^k}{3^{2k+1}}\right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{2^k}{3^{2k+1}}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{2}{3^2}\right)^k\times\left(\tfrac{1}{3}\right)\\
\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{2^k}{3^{2k+1}}\right) &= \left(\tfrac{1}{3}\right)\times\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{2}{9}\right)^k\\
\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{2^k}{3^{2k+1}}\right) &= \left(\tfrac{1}{3}\right)\times\frac{1-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{9}}\\
\sum_{k=0}^{n}\left(\tfrac{2^k}{3^{2k+1}}\right) &= \left(\tfrac{3}{7}\right)\times\left(1-\left(\tfrac{2}{9}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, calculons $\sum\limits_{k=n}^{2n}k^3$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n}k^3 &= \sum_{k=1}^{2n}k^3-\sum_{k=1}^{n-1}k^3\\
\sum_{k=n}^{2n}k^3 &= \frac{(2n)^2((2n)+1)^2}{4}-\frac{(n-1)^2((n-1)+1)^2}{4}\\
\sum_{k=n}^{2n}k^3 &= \frac{4n^2(2n+1)^2}{4}-\frac{(n-1)^2n^2}{4}\\
\sum_{k=n}^{2n}k^3 &= n^2\left((2n+1)^2-\tfrac{1}{4}(n-1)^2\right)\\
\sum_{k=n}^{2n}k^3 &= n^2\left(\tfrac{15}{4}n^2+\tfrac{9}{2}n+\tfrac{3}{4}\right)
\end{aligned}$$

Remarque : On remarque que $\sum\limits_{k=l}^{n}a_k=\sum\limits_{j=l}^{n}a_j=\sum\limits_{\alpha=l}^{n}a_\alpha$. "Les entiers" k, j, l sont des indices de sommation autrement dit ce sont des variables muettes que l'on peut interchanger.

Proposition 17.3 (Changement d'indice)
Soient l,n,p des entiers naturels avec $n\le p$ et $a_{n+l},a_{n+l+1},..,a_{p+l}$ des nombres réels.
Alors, en posant $j=k+l$, on a $\sum\limits_{k=n}^{p}a_{k+l}=\sum\limits_{j=n+l}^{p+l}a_j$
(on dit que l'on a fait le changement d'indice $j=k+l$).

Point Méthode : Simplifions $\sum\limits_{k=3}^{10} \dfrac{k^2-k-2}{k-2}$. Posons $j = k-2$ alors $k = j+2$.
Quand $k = 3$, alors $j = 1$
Quand $k = 10$ alors $j = 8$.
On obtient

$$\sum_{k=3}^{10} \frac{k^2-k-2}{k-2} = \sum_{j=1}^{8} \frac{(j+2)^2-(j+2)-2}{(j+2)-2}$$

$$\sum_{k=3}^{10} \frac{k^2-k-2}{k-2} = \sum_{j=1}^{8} \frac{j^2+3j}{j}$$

$$\sum_{k=3}^{10} \frac{k^2-k-2}{k-2} = \sum_{j=1}^{8} (j+3)$$

Point Méthode : Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : Montrons que cette égalité est vraie au rang $n = 1$.
Le membre de gauche de l'égalité est égal à 1 et le membre de droite est égal à $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$.
Donc l'égalité est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons qu'à un rang n, on a $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Montrons alors qu'au rang $n+1$, on a $\sum_{k=1}^{n+1} k = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

$$1 + .. + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\frac{n}{2}+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Par conséquent $1 + 2 + .. + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.
L'hérédité est démontrée.

Conclusion Finalement, par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + .. + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Fiche 24 - Sommes

Exercice 1 (Symbole de sommation)
Ecrire sans le symbole $\sum$ les expressions ci-dessous :

1. $\sum_{k=1}^{5} k^2$
2. $\sum_{j=3}^{8} \frac{j}{3^j}$

Ecrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$

1. $2^5+3^5+4^5+..+n^5$ avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
2. $\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^6}{6} + ... + \frac{a^{2n}}{2n}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Symbole de sommation)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

1. $A_n = \sum_{k=0}^{n} (5k+2)$
2. $B_n = \sum_{k=0}^{n} (4k^2-4k+2)$
3. $C_n = \sum_{k=0}^{n} (6k^2-2k+1)$
4. $D_n = \sum_{k=0}^{n} (3k^3-5k+1)$
5. $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$
6. $F_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$
7. $G_n = \sum_{k=1}^{n} (2^k+3^{2k})$
8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $H_p = \sum_{k=0}^{p} (k^3 - 6 \times 2^k)$
9. $I_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^{k+3}}{3^{k+1}}\right)$
10. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $J_p = \sum_{k=2}^{3p} (2k+1)$
11. $K_n = \sum_{k=n}^{2n} (k^2)$ avec $n \geq 2$.
12. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 3$, $L_p = \sum_{k=3}^{p} (3k^2 + 2k+2)$
13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \sum_{k=2}^{2n+1} (k^3+3^{k+1})$
14. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $N_p = \sum_{k=p}^{2p} (2k^2+k^3)$
15. Soit $p \in \mathbb{N}$, $O_p = \sum_{k=p}^{p+2} (2)$

Exercice 3 (Principe des dominos)

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$
2. En déduire $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$

Exercice 4 (Principe des dominos)
On pose $u_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = u_n + n$$
$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. Exprimer, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k$$
en fonction de u_n.
2. Exprimer, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de n.

Exercice 5 (Récurrence)
Montrer par récurrence les égalités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = n^2$$
3. Soit $a \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$,
$$\sum_{k=3}^{n} 4k(k-1)(k-2) =$$
$$n(n+1)(n-1)(n-2)$$

Programme de Colle 21

Révisions : Dénombrement

- Combinaison, formules, triangle de Pascal, binôme de Newton,
- p-listes, p-listes d'éléments disctincts, permutation.

Sommes

- Symbole de sommation : propriétés de calculs,
- sommes remarquables ($\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$, $\sum q^k$)
- *Méthode : changement de variable dans une somme*

Révisions : suites numériques

- Suites géométriques, arithmétiques et leurs sommes de termes consécutifs.
- Suites arithmético-géométriques.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Exercices possibles Exercices 1 à 5 semaine 20

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

1. $$A_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$$
2. $$B_n = \sum_{k=0}^{n+1}(6k^2+4k+1)$$
3. $$C_n = \sum_{j=3}^{n}(3j^2+1)$$
4. $$D_n = \sum_{i=0}^{2n} 3 \times 4^{i+1}$$
5. $$E_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{5 \times 2^j}{3^{j+1}}$$
6. $$F_r = \sum_{k=0}^{3r} \frac{2^{2k}}{3^{4k}}$$
7. $$G_k = \sum_{s=0}^{k} \frac{2^{3s-1}}{3^{2s+2}}$$

Exercice 2

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in N$,
$$\sum_{k=0}^{n}(4k-1) = 2n^2+n-1$$
2. Retrouver ce résultat en utilisant les formules usuelles.

Exercice 3

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in N^*$,
$$\sum_{k=0}^{n}(6k+2) = 3n^2+5n+2$$
2. Retrouver ce résultat en utilisant les formules usuelles.

Exercice 4

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in N^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$