Chapitre 16

Calcul Intégral

16.1 Généralités

Soit I un intervalle.

Définition 16.1 (Primitive)
Soient f et F deux fonctions définies sur I.
Dire que F est une primitive de f sur I signifie que F est dérivable sur I et

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

Théorème 16.1 (Existence)
Toute fonction continue sur un intervalle I possède au moins une primitive sur I.

- *Si F est une primitive de f sur l'intervalle I alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.*
- *Soient x_0 et y_0 deux nombres réels. Alors il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$*

Exemple :

1. Soit $f : x \mapsto 6x + 4$, continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
   Alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto 3x^2 + 4x$.
   Déterminons la primitive G de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $G(1) = 5$.
   Pour cela, résolvons $3 \times 1^2 + 4 \times 1 + k = 5$. On obtient $k = -2$.
   Finalement $G : x \mapsto 3x^2 + 4x - 2$.
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, continue sur $\mathbb{R}^*$ qui est la réunion de deux intervalles.
   Alors les primitives de f sur $\mathbb{R}^*$ sont de la forme

$$F : x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{x} + k & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{x} + k' & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Pour déterminer une unique primitive de f sur $\mathbb{R}^*$, il nous faut donc deux conditions, une sur chaque intervalle.
   Déterminons la primitive G de f sur $\mathbb{R}^*$ telle que $G(1) = 3$ et $G(-2) = 5$.
   Pour cela, résolvons $-\frac{1}{1} + k = 3$ et $-\frac{1}{-2} + k' = 5$.
   On obtient $k = 4$ et $k' = \frac{9}{2}$. Finalement G est définie par :

$$G : x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{x} + 4 & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{x} + \frac{9}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Définition 16.2 (Intégrale)
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f et on le note $\int_a^b f(t)dt$.
Par convention, $[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$ et donc on a $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$.

Proposition 16.1

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \qquad \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

Exemple :

$$\int_1^5 6x + 4dx = \left[3x^2 + 4x\right]_1^5 = \left(3 \times 5^2 + 4 \times 5\right) - \left(3 \times 1^2 + 4 \times 1\right) = 95 - 7 = 88$$

Proposition 16.2 (Linéarité des primitives)
Soient F et G des primitives, respectivement de f et de g sur I.
Soit λ un nombre réel.

- *$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.*
- *λF est une primitive de λf sur I.*

Remarque : $F \times G$ n'est pas une primitive de $f \times g$.

Proposition 16.3 (Linéarité de l'intégrale)
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

Proposition 16.4 (Relation de Chasles)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et soit $c \in [a;b]$ alors on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

16.2 Calcul intégral

Proposition 16.5 (Primitives de référence)

Fonctions	*Primitives*	*Fonctions*	*Primitives*	*Conditions de validité*
x^α $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+k$	$u'u^\alpha$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+k$	$\alpha \notin \mathbb{Z} \Rightarrow u>0$ $-\alpha \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u \neq 0$
$e^{\alpha x}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+k$	$u'e^u$	e^u+k	
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|+k$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|+k$	$u \neq 0$
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{-1}{x}+k$	$\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{-1}{u}+k$	$u \neq 0$

Point Méthode :

1. Calculons $\int\limits_1^2 3x^4+6x^5+\frac{1}{x^3}dx$.
$$\int\limits_1^2 3x^4+6x^5+\frac{1}{x^3}dx = \left[3\frac{1}{5}x^5+6\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{-3+1}x^{-2}\right]_1^2$$
2. Calculons $\int\limits_1^2 \frac{3}{x}+e^{2x}dx$.
$$\int\limits_1^2 \frac{3}{x}+e^{2x}dx = \left[3\ln|x|+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^2$$
3. Calculons $\int\limits_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t}dt$.
$$\int\limits_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t}dt = \left[\ln\left|t^2+t\right|\right]_1^2$$
4. Calculons $\int\limits_1^2 e3x^2+4(12x+8)dx$.
Posons, $\forall x \in [1;2]$, $u(x)=3x^2+4$, u dérivable et $u'(x)=6x+4$.
Donc $12x+8=2(6x+4)=2u'(x)$.Dès lors :
$$\int\limits_1^2 e3x^2+4(12x+8)dx = \int\limits_1^2 2eu(x)u'(x)\,dx = \left[2e3x^2+4\right]_1^2$$
5. Calculons $\int\limits_2^6 3t\left(t^2+1\right)^4 dt$.
Posons, $\forall t \in [2;6]$, $u(t)=t^2+1$, u dérivable et $u'(t)=2t$.
Donc $3t=\frac{3}{2}2t=\frac{3}{2}u'(t)$.Dès lors :
$$\int\limits_2^6 3t\left(t^2+1\right)^4 dt = \int\limits_2^6 \frac{3}{2}u'(t)\left(u(t)\right)^4 dt = \left[\frac{1}{5}\left(u(t)\right)^5\right]_2^6 = \cdots$$

Théorème 16.2 (Intégration par parties)
Soient u et v deux fonctions C^1 sur $[a;b]$ alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Point Méthode :

- Calculons $\int_1^5 xe^{(2x)}dx$. La fonction $x \mapsto xe^{2x}$ est continue sur $[1;5]$ donc l'intégrale existe.
  Soient $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \frac{1}{2}e^{(2x)}$ sont C^1 sur $[1;5]$ et on a $\forall x \in [1;5]$,

$$u(x) = x \text{ et } v(x) = \frac{1}{2}e^{(2x)}$$

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = e^{(2x)}$$

  Par une intégration par parties, on obtient :

$$\int_1^5 xe^x dx = \left[x \times \frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^5 - \int_1^5 1 \times \frac{1}{2}e^{(2x)}dx$$

$$\int_1^5 xe^x dx = \left[\frac{5}{2}e^{10} - \frac{1}{2}e^2\right] - \int_1^5 \frac{1}{2}e^{(2x)}dx$$

$$\int_1^5 xe^x dx = \left[\frac{5}{2}e^{10} - \frac{1}{2}e^2\right] - \left[\frac{1}{4}e^{(2x)}\right]_1^5$$

$$\int_1^5 xe^x dx = \left[\frac{5}{2}e^{10} - \frac{1}{2}e^2\right] - \left[\frac{1}{4}e^{(10)} - \frac{1}{4}e^{(2)}\right]$$

$$\int_1^5 xe^x dx = \frac{9}{4}e^{10} - \frac{1}{4}e^2$$

  Dans un produit polynôme par exponentielle, on "dérive" le polynôme et on "primitive" l'exponentielle. Autant d'intégrations par parties seront nécessaires que le polynôme a un degré élevé.

- Calculons $\int_1^5 x\ln(x)dx$. La fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est continue sur $[1;5]$ donc l'intégrale existe.
  Soient $u : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ et $v : x \mapsto \ln(x)$ sont C^1 sur $[1;5]$ et on a $\forall x \in [1;5]$,

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{ et } v(x) = \ln(x)$$

$$u'(x) = x \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}$$

  Par une intégration par parties, on obtient :

$$\int_1^5 x\ln(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \times \ln(x)\right]_1^5 - \int_1^5 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}dx$$

$$\int_1^5 x\ln(x)dx = \left[\frac{25}{2}\ln(5) - 0\right] - \int_1^5 \frac{1}{2}xdx$$

$$\int_1^5 x\ln(x)dx = \frac{25}{2}\ln(5) - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^5$$
$$\int_1^5 x\ln(x)dx = \frac{25}{2}\ln(5) - \left[\frac{25}{4} - \frac{1}{4}\right]$$
$$\int_1^5 x\ln(x)dx = \frac{25}{2}\ln(5) - 6$$

Dans un produit polynôme par logarithme, on "primitive" le polynôme et on "dérive" le logarithme.

Théorème 16.3 (Changement de variable)
Soient f une fonction continue sur $[a;b]$ et u une fonction C^1 sur $[\alpha;\beta]$ telle que $u([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$ alors on a

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt$$

Preuve :
f est continue sur $[a;b]$. Notons donc F une primitive de f sur $[a;b]$.
F est dérivable sur $[a;b]$ et u est dérivable sur $[\alpha;\beta]$ telle que $u([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$.
Donc $F \circ u$ est dérivable sur $[\alpha;\beta]$ en tant que composée et on a

$$(F \circ u)' = f \circ u \times u'$$

Dès lors

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = [F(x)]_{u(\alpha)}^{u(\beta)} = [(F \circ u)(t)]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt$$

■

Point Méthode : Calculons $\int_0^1 e^{3t}dt$.
La fonction $t \mapsto e^{3t}$ est continue sur $[0;1]$ donc l'intégrale existe.
On pose $x = 3t$.
$t \mapsto 3t$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
Si $t = 0$, alors $x = 0$.
Si $t = 1$, alors $x = 3$.
D'autre part $x = 3t$ donne $\frac{1}{3}x = t$ d'où $\frac{1}{3}dx = dt$.
Par ce changement de variable, on obtient :

$$\int_0^1 e^{3t}dt = \int_0^3 e^x \frac{1}{3}dx$$
$$\int_0^1 e^{3t}dt = \frac{1}{3}\int_0^3 e^x dx$$
$$\int_0^1 e^{3t}dt = \frac{1}{3}\left[e^x\right]_0^3$$
$$\int_0^1 e^{3t}dt = \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right)$$

Fiche 23 - Calcul intégral

Exercice 1
Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer.

$$A = \int_0^2 3x^4 + 5x + e^{3x} dx$$

$$B = \int_1^0 (x^2+1)e^{x^3+3x} dx$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \int_0^n t^n dt$$

$$D = \int_0^1 \frac{5x}{1+x^2} dx$$

$$E = \int_0^1 \frac{5x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ F_n = \int_0^1 \frac{5t}{(1+t^2)^n} dt$$

$$G = \int_{-1}^1 (t+1)(t+2)^2 dt$$

$$H = \int_0^1 (2x-1)\exp(x^2-x+1) dx$$

$$I = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Exercice 2 (Intégration par parties)
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

$$J = \int_{-1}^1 x e^{3x} dx$$

$$K = \int_0^1 (x^2+x)e^{2x} dx$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_n = \int_1^e t^n \ln t dt$$

$$M = \int_0^1 \ln(1+x)\left(\frac{1}{2}+x\right) dx$$

$$N = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

Exercice 3 (Changement de variable)
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$O = \int_0^1 x\sqrt{3x+1} dx \quad (u = 3x+1)$$

$$P = \int_1^e \frac{\ln t}{t} dt \quad (x = \ln t)$$

$$Q = \int_1^2 3y\sqrt{5-2y} dy \quad (x = 5-2y)$$

$$R = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}} dx \quad (t = \sqrt{x+1})$$

$$S = \int_0^1 \frac{\left(t^2+\sqrt{t^2+1}\right)^2}{\sqrt{t^2+1}} t dt \quad (u = \sqrt{t^2+1})$$

Exercice 4
Justifier que chacune des fonctions suivantes possède, sur l'intervalle considéré, une primitive puis expliciter l'unique primitive F satisfaisant à la condition donnée :

1. $$a(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
   sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = \ln 2$.
2. $$b(x) = 3(x^2-2x)\exp(x^3-3x^2)$$
   sur $\mathbb{R}$ avec $F(1) = 4$.
3. $$c(x) = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$
   sur $\mathbb{R}_+$ avec $F(2) = 1$.

Programme de Colle 20

Révisions : Dénombrement

- Combinaison, formules, triangle de Pascal, binôme de Newton,
- p-listes, p-listes d'éléments disctincts, permutation.

Intégrales

- Définition de primitive et d'intégrale.
- Théorème d'existence des primitives, primitives de référence.
- Intégrales : Linéarité et relation de Chasles
- *Méthodes : Intégration par parties, changement de variable.*

Révisions : formules sur les puissances, ln, exp

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 19

Exercice 1
Justifier que chacune des fonctions suivantes possède, sur l'intervalle considéré, une primitive puis expliciter l'unique primitive F satisfaisant à la condition donnée :

1. $a(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = 1$.
2. $b(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^5$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(-1) = 1$
3. $c(x) = \dfrac{4}{(3x-1)^2}\exp(\dfrac{2}{3x-1})$ sur $[1, +\infty[$ avec $F(1) = e$.

Exercice 2
Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer.

$$I_1 = \int_1^{10} e^{2x}dx \qquad I_2 = \int_1^2 3^x dx$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}dt \qquad I_4 = \int_1^2 \frac{(\ln t)^5}{t}dt$$

Exercice 3
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

$$M = \int_1^4 x^2 \ln x dx$$

$$N = \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^3}dt$$

$$O = \int_1^2 (x+1)e^x dx$$

Exercice 4
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\int_1^2 \sqrt{3x+1}x\,dx \quad (u = 3x+1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} \quad (u = e^x)$$

(On remarquera pour cette dernière intégrale que $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$.)

Exercice 5
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_a^{1/a} \frac{\ln x}{x}dx$$

1. Montrer par une intégration par parties que
$$I(a) = [ln(x)^2]_a^{\frac{1}{a}} - I(a)$$
2. En déduire $I(a)$.
3. Recalculer $I(a)$ en posant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$ et obtenir que $I(a) = -I(a)$ et en déduire $I(a)$.