

Chapitre 15

Méthodologie du dénombrement



Point Méthode :

- **Décomposer la situation**

Dénombrer consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble donné, autrement dit le nombre de possibilités offertes par une situation donnée. Il faut parfois décomposer la situation décrite pour pouvoir en dénombrer les possibilités :

- Si la situation à étudier peut se décrire par plusieurs cas disjoints ("ou bien" "soit") alors le dénombrement peut s'obtenir en ajoutant les dénombrements de chacun de ces cas.
- Si la situation à étudier peut être décrite par plusieurs étapes successives ("puis" "et") alors le dénombrement peut s'obtenir en multipliant les dénombrements de chacune des étapes.
- Il est parfois plus simple de dénombrer l'ensemble contraire.

- **Dénombrer chaque composante**

Une fois la situation de départ décomposée en situations classiques, encore faut-il dénombrer ces dernières. Il y a 3 cas possibles.

- Si l'ordre intervient et les répétitions autorisées,
il y a n^p façons de choisir p fois successives un élément parmi n .
- Si l'ordre intervient et si les répétitions ne sont pas autorisées,
il y a A_n^p façons de ranger p éléments parmi n .
- Si l'ordre n'intervient pas et si les répétitions ne sont pas autorisées,
il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir p éléments parmi n .

Exemple : Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches. On tire 5 boules successivement, avec remise.

1. Combien de tirages sont-ils possibles ?
2. Combien de tirages comportent 3 noires et 2 blanches ?
3. Combien de tirages comportent au plus une noire ?
4. Combien de tirages comportent au moins 2 noires ?

Correction :

1. Faire un tirage revient à choisir 5 fois successives 1 boule parmi 7 soit 7^5 tirages possibles.
2. Faire un tirage comportant 3 noires et 2 blanches revient à :
 - d'abord choisir les rangs d'apparitions des blanches (soit choisir 2 places parmi 5 i.e. $\binom{5}{2}$ possibilités)
 - puis de choisir 2 fois successives une blanche parmi les 4 (soit 4^2 possibilités)
 - puis de choisir 3 fois successives une noire parmi les 3 (soit 3^3 possibilités).
 Finalement il y a $\binom{5}{2} \times 4^2 \times 3^3$ possibilités.
3. Faire un tirage comportant au plus une noire revient à
 - faire un tirage comportant 0 noire et 5 blanches soit 4^5 possibilités.
 - ou bien à faire un tirage comportant une noire et 4 blanches autrement dit
 - choisir le rang d'apparition de la noire soit 5 possibilités,
 - puis choisir cette noire parmi les 3, 3 possibilités,
 - puis choisir 4 fois successives une blanche parmi les 4, 4^4 possibilités,
 Donc pour ce cas $5 \times 3 \times 4^4$ possibilités).
 Finalement il y a $5 \times 3 \times 4^4 + 4^5$ possibilités.
4. Faire un tirage comportant au moins 2 noires revient à ne pas faire un tirage comportant au plus une noire soit $7^5 - (5 \times 3 \times 4^4)$ possibilités.



Le principe des bergers : Pour compter le nombre de moutons de son troupeau, un berger compte toutes les pattes et divise ensuite le nombre obtenu par 4.

Exemple : Supposons que l'on recherche le nombre d'anagrammes du mot CHABADA. Toute la difficulté va provenir du fait que ce mot contient trois fois la lettre A. On sait facilement dénombrer les anagrammes de $CHA_1BA_2DA_3$, soit $7!$. Or, les trois A sont identiques, le dénombrement précédent a compté $3!$ chacun des anagrammes de CHABADA.

Finalement le nombre d'anagrammes de CHABADA est $\frac{7!}{3!}$.

Fiche 22 - Dénombrement

Exercice 1

1. Combien y a-t-il de nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1 ?
2. Combien y a-t-il de nombres ayant 7 chiffres différents ?
3. Combien y a-t-il de nombres pairs de 7 chiffres ?

Exercice 2

Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant les conditions suivantes :

1. au moins une boule blanche a été tirée
2. une boule noire au plus a été tirée
3. trois boules noires et une boule blanche ont été tirées dans cet ordre
4. deux boules noires et deux boules blanches ont été tirées

Exercice 3

1. Calculer le nombre d'anagrammes des mots MISSISSIPI et ABRACADABRA.
2. Un QCM comporte 20 questions, pour chacune 4 réponses sont possibles. Une réponse est autorisée par question. Combien y a-t-il de "fiches" réponse possibles ?
3. 10 personnes se serrent la main pour se saluer. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

Exercice 4

Dans une urne contenant 5 boules vertes numérotées de 1 à 5 et 3 boules rouges numérotées de 1 à 3, on prend simultanément 3 boules.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant :
 - (a) que des boules rouges ?
 - (b) que des boules vertes ?
 - (c) des boules des deux couleurs ?
 - (d) au plus une boule verte ?

Exercice 5

On lance 5 fois de suite un dé cubique équilibré. On note à chaque fois le numéro de la face supérieure. On obtient donc une suite de 5 numéros.

1. Combien y a-t-il de suites possibles ?
2. Combien y a-t-il de suites :
 - (a) où tous les numéros sont strictement supérieurs à 4 ?
 - (b) où tous les numéros sont distincts ?
 - (c) où tous les numéros sont différents de 1 ?
 - (d) qui contiennent au moins une fois le numéro 1 ?

Exercice 6

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 bleues. On prend simultanément 3 boules.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages tricolores ?
3. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant au plus une rouge ?
5. Combien y a-t-il de tirages au moins une bleue ?

Exercice 7

Même exercice que précédemment en prenant successivement 3 boules sans remise.

Exercice 8

On lance n fois de suite un dé à 4 faces.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Dénombrer les tirages pour lesquels chacun des quatre chiffres apparaît au moins une fois.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Une urne contient 2 boules rouges et $n - 2$ blanches, numérotées de 1 à n . On tire toutes les boules une à une sans remise.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages où les boules rouges sont côte à côte ?
3. Combien y a-t-il de tirages où les 2 boules rouges sont dans les trois premières places ?
4. Combien y a-t-il de tirages où la première boule rouge est à la $k^{\text{ième}}$ place avec $1 \leq k \leq n - 1$?

Programme de Colle 19

Matrices

- Définition de matrice et matrices particulières,
- Définition de l'addition, de la multiplication par un réel, de la transposée.
- Définition de la puissance d'une matrice, puissance d'une matrice diagonale, binôme de Newton.
- *Méthode : Utilisation d'une récurrence ou du binôme de Newton*

Révisions : Dénombrement

- Combinaison, formules, triangle de Pascal, binôme de Newton,
- p-listes, p-listes d'éléments distincts, permutation.

Exercices possibles

Exercices 1 à 9 semaine 18

Exercice 1

Trois personnes A, B, C se répartissent cinq gâteaux différents, l'une en prend 1, les deux autres en prennent chacune 2.

Combien y a-t-il de distributions possibles ?

Exercice 2

On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie en notant dans l'ordre les résultats apparus (pile ou face).

1. Combien existe-t-il de résultats possibles ?
2. Dans combien de résultats y a-t-il deux "pile" ?
3. Dans combien de résultats y a-t-il plus de "pile" que de "face" ?

Exercice 3

Dans un jeu ordinaire de 32 cartes, on choisit au hasard et simultanément 5 cartes, formant ainsi une main.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Quel est le nombre de mains contenant un carré (4 cartes identiques) ?
3. Quel est le nombre de mains contenant un full (3 as et 2 rois) ?
4. Quel est le nombre de mains contenant une paire exactement ?
5. Quel est le nombre de mains contenant un brelan exactement ?

Exercice 4

Combien existe-t-il de nombres de 5 chiffres (ne commençant pas par 0) et contenant au moins 4 fois le chiffre 1 ?

Exercice 5

Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire simultanément 4 jetons de ce sac.

1. Combien existe-t-il de tirages possibles ?
2. Parmi ceux-ci combien de tirages :
 - (a) ne comportent que des numéros pairs ?
 - (b) ne comportent que des numéros impairs ?
 - (c) ne comportent qu'un seul numéro pair ?
 - (d) comportent au moins un numéro pair ?
 - (e) comportent moins de deux numéros pairs ?

Exercice 6

Un convoi de véhicules publicitaires est formé de 4 camions et 2 voitures tous distincts. Ils pénètrent les uns après les autres sur une place de village.

1. De combien de façons différentes peuvent-ils se présenter ?
2. Le premier véhicule est un camion, combien y a-t-il dans ce cas de convois possibles ?
3. Soit X la VAR égale au nombre de camions en tête du convoi. Etablir la loi de X et calculer $E(X)$. Tracer sa fonction de répartition.