Chapitre 14

Matrices

14.1 Définitions

Définition 14.1 (Matrice)

1. *Soient n, p deux nombres entiers non-nuls. On appelle matrice à n lignes et p colonnes tout tableau rectangulaire de nombres réels comportant n lignes et p colonnes*

2. *L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

3. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne se note $a_{i,j}$ et on écrit alors*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

ou encore $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

Définition 14.2 (Matrices particulières)

1. *Une matrice ne comportant qu'une seule ligne (resp. colonne) s'appelle une **matrice ligne**. (resp. colonne).*

2. *La **matrice nulle** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, que l'on note $0_{n,p}$, est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.*

3. *Une **matrice carré** d'ordre n est une matrice à n lignes et n colonnes. L'ensemble des matrices carré d'ordre n se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

4. *La **matrice nulle** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se note 0_n.*

5. *La **diagonale** d'une matrice carré A est la liste des coefficients $(a_{i,i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.*

6. *Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous les coefficients hors de la diagonale sont nuls.*

7. *La* ***matrice identité*** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée I_n, est la matrice :*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. *Une* ***matrice scalaire*** *est une matrice de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.*
9. *Une* ***matrice triangulaire supérieure*** *(resp. inférieure) est une matrice dont tous les coefficients sous (resp. au-dessus de) la diagonale sont nuls.*

14.2 Opérations sur les matrices

Définition 14.3 (Addition)
Soient A et B deux matrices de même taille. La somme $A + B$ est la matrice de même taille obtenue en ajoutant deux à deux les coefficients de A et de B.

Définition 14.4 (Multiplication par un réel)
Soient A une matrice et λ un nombre réel. Le produit λA est une matrice de même taille obtenue en multipliant chacun des coefficients de A par λ.

Définition 14.5 (Produit)
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ un élément de $\underline{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$
et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ un élément de $\underline{\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})}$
On appelle produit de A par B l'élément de $\underline{\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})}$ noté $A \times B$ (ou AB) défini par $A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ où

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + .. + a_{i,p}b_{p,j} \ \forall i \in \{1; ..; n\} \text{ et } \forall j \in \{1; ..; m\}$$

Remarque : AB est différent de BA, l'ordre d'écriture est important. De plus le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la seconde.

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & \vdots & \boxed{b_{1,j}} & \vdots \\
 & & & & \vdots & \boxed{b_{2,j}} & \vdots \\
 & & & & \vdots & \boxed{\vdots} & \vdots \\
 & & & & \vdots & \boxed{b_{p,j}} & \vdots \\
\hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\boxed{a_{i,1}} & \boxed{a_{i,2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{i,p}} & \cdots & \boxed{c_{i,j}} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Définition 14.6 (Transposée et matrice symétrique)
Soit A une matrice, la transposée de A, notée ${}^tA$ est la matrice obtenue à partir de A en écrivant les lignes de A sous forme de colonnes.
Dire qu'une matrice A est symétrique signifie que ${}^tA = A$

Proposition 14.1 (Règles de calcul de l'Addition)
Soient A, B, C trois éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- $A + B = B + A$ *(commutativité)*
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(associativité)*
- $0_{n,p} + A = A + 0_{n,p} = A$ *(élément neutre)*
- $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$ *(opposé)*
- $A + B = C \Leftrightarrow A = C - B$
- $A + C = B + C \Leftrightarrow A = B$

Proposition 14.2 (Règles de calcul de la Multiplication par un réel)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* λ, μ *deux nombres réels*
- $1A = A$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ *(distributivité à gauche)*
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *(distributivité à droite)*
- $\lambda(\mu A) = (\lambda u)A$
- $A(\lambda C) = (\lambda A)C = \lambda(AC)$

Proposition 14.3 (Règles de calcul de la Transposition)
1. *Soient* A, B *deux éléments de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *et* λ *un nombre réel.*
   - ${}^t(A + B) ={}^t A +{}^t B$
   - ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$
   - ${}^t({}^t A) = A$
2. *Soient* $A \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$${}^t(AB) ={}^t B {}^t A$$

Définition 14.7 (Commuter)
Soient A *et* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Dire que* A *et* B *commutent (ou* A *et* B *sont permutables) signifie que* $AB = BA$.

Proposition 14.4 (Règles de calcul du produit)
Soient A, B, C *trois éléments de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $I_n A = A I_n = A$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$

14.3 Puissance d'une matrice

14.3.1 généralités

Définition 14.8 (Puissance d'une matrice)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$. *On pose*

$$A^0 = I_n, \ A^k = \underbrace{A \times A \times .. \times A}_{k \text{ fois}}$$

Proposition 14.5 (Propriétés de calcul)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on a*

$$A^1 = A, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ A^k A^p = A^{k+p}$$

Remarque :

1. Seules les puissances entières positives d'une matrice sont définies ; il n'y a pas de division chez les matrices !
2. En général $(AB)^k \neq A^k B^k$. En effet dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB \neq BA$.

Proposition 14.6 (Puissances et matrices permutables)
Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A et B commmutent (ou sont permutables)
alors $\forall k \in \mathbb{N},\ (AB)^k = A^k B^k$.
I_n commute avec toutes les matrices d'ordre n.

Proposition 14.7 (Puissance d'une matrice diagonale)
Soit D une matrice carrée d'ordre n diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \textit{ Alors } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ I^k = I$$

14.3.2 Utilisation du Binôme de Newton

Théorème 14.1 (Binôme de Newton)
Soient A et B deux matrices qui commutent. Alors pour tout entier n, on a

$$(A+B)^n = \binom{n}{0} A^0 B^n + \binom{n}{1} A^1 B^{n-1} + \binom{n}{2} A^2 B^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} A^n B^0$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
L'objectif est de calculer $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, A^n.

1. Calculons $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, C^k.
   Le calcul de C^2 donne 0_3.
   On démontrera donc que $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on a $C^k = 0_3$.
2. Calculons $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, A^n.
   On a $A = B + 5C$. On sait par ailleurs que B et C commutent.
   On peut donc utiliser le **binôme de Newton**.
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$
   $$\begin{aligned} A^n &= (5C+B)^n \\ A^n &= \binom{n}{0} 5^0 C^0 B^n + \binom{n}{1} 5^1 C^1 B^{n-1} + \binom{n}{2} 5^k C^2 B^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} 5^n C^n B^0 \\ & \quad \text{or } \forall i \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ C^i = 0_3 \\ A^n &= \binom{n}{0} 5^0 C^0 B^n + \binom{n}{1} 5^1 C^1 B^{n-1} \\ A^n &= I_3 B^n + 5nCB^{n-1} = B^n + 5nCB^{n-1} \end{aligned}$$
3. Explicitons le résultat obtenu en énonçant les coefficients de A^n, sachant que B est diagonale :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.3.3 Utilisation d'une récurrence

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

L'objectif est de calculer $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n$.

1. On remarque que $A = 3I_3 + J$.
2. Le calcul de J^2 donne $J^2 = I$.
3. Montrons par récurrence qu'il existe 2 suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n I_3 + b_n J$$

- Initialisation : $A^0 = I_3$ et en posant $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ on a bien $a_0 I_3 + b_0 J = I_3$.
- Hérédité : Supposons qu'à un certain rang n, on ait $A^n = a_n I_3 + b_n J$. Montrons alors qu'au rang $n+1$, il existe a_{n+1} et b_{n+1} telle que $A^{n+1} = a_{n+1} I_3 + b_{n+1} J$.

$$\begin{array}{rcl} A^{n+1} & = & A^n \times A \\ A^{n+1} & = & (a_n I_3 + b_n J) \times (3I_3 + J) \\ A^{n+1} & = & 3a_n I_3 + a_n J + 3b_n J + b_n J^2 \\ & & \text{or } J^2 = I \\ A^{n+1} & = & (3a_n + b_n)\, I_3 + (a_n + 3b_n)\, J \end{array}$$

En posant $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n$, on obtient que $A^{n+1} = a_{n+1} I_3 + b_{n+1} J$. L'hérédité est démontrée.

- Conclusion : Par le principe de récurrence, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n I_3 + b_n J$ avec $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}$$

4. Il nous faut maintenant expliciter le terme général des suites (a_n) et (b_n).
En posant $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$, on obtient que (u_n) et (v_n) sont des suites géométriques de raisons respectives 4 et 2.
D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^n$ et $v_n = 2^n$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ et $b_n = \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.
On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2}(4^n + 2^n) \text{ et } b_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n I_3 + b_n J$, on obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 4^n - 2^n \\ 0 & 4^n & 4^n - 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Fiche 20 - Matrices

Exercice 1
Calculer les produits LC et CL où $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2
Calculer les produits suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3
Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer tous les produits possibles.

Exercice 4
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier

$S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$

Exercice 5
Expliciter les matrices :

$$A = \left((-1)^{i+j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

$$B = (i+j)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

$$C = (ij)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

$$D = (2i)_{\substack{1 \leq i \leq 4 \\ 1 \leq j \leq 2}}$$

Trouver une écriture compacte pour la matrice suivante

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. À quelle condition sur n et m peut-on considérer le produit de A par elle-même ?
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant les règles de calcul matriciel, développer l'expression $(A+B)^2$
3. Donner un exemple qui prouve qu'en général, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$. Démontrer que $A^2B^2 = (AB)^2$.

Exercice 7
Mq $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 6^{n-1}J$ avec $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 8
Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.

1. Calculer B^2 et B^3. En déduire l'expression de B^k en fonction de k.
2. En remarquant que $A = B + 2I$, calculer A^n.

Programme de Colle 18

Convergence des Suites

- *Méthode : point fixe, utilisation du théorème des accroissements finis.*
- Suites adjacentes.

Révisions : formules sur les puissances, ln, exp

Matrices

- Définition de matrice et matrices particulières,
- Définition de l'addition, de la multiplication par un réel,
- Définition de la transposée, du produit, de matrices qui commutent,
- Définition de la puissance d'une matrice, puissance d'une matrice diagonale.

Exercices possibles Exercices 1 à 8 semaine 17

Exercice 1
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} q & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ où $q \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une matrice M telle que $A = qI + M$.
2. Calculer M^2. En déduire A^n.

Exercice 2
Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel a tel que $A = aI + B$. Calculer B^2 et B^3.
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 3
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n I + b_n A$
2. Expliciter a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n.

Exercice 4
On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n

Exercice 5
On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP+bQ$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a^nP + b^nQ$

Fiche 21 - Matrices

Exercice 1
On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez J^2 et J^3. En déduire les puissances successives de J : $J^k, k \geq 3$.
2. On pose $T = 2I + J$. Donnez l'expression de T^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
3. Vérifier que l'expression est valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
4. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par les relations de récurrence :
$$\forall n \geq 0, \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \\ c_{n+1} = b_n + 2c_n \end{cases}$$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = T^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0, c_0 et de n.

Exercice 2
Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

1. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0_3$.
2. Calculer B^n pour tout $n > 2$.

Exercice 3
On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par la donnée de leurs premiers termes u_0 et v_0 et les relations de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
2. Montrez que l'on peut écrire $A = 5I + J$ où I est la matrice identité et J est une matrice que vous déterminerez.
3. Calculer J^2 et en déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, J^n.
4. Calculez A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
5. Déduisez de la question précédente les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 4
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Expliciter α et β tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$
2. Montrer par récurrence qu'il existe a_n et b_n tels
$$A^n = a_n A + b_n I_3$$
3. Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de $b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
5. Expliciter $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n$.

Exercice 5
Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et
$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & x^2 \\ 1/x & 0 & x \\ 1/x^2 & 1/x & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ où α_n et β_n sont des entiers naturels.
2. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha_n - \beta_n$ et $v_n = 2\alpha_n + \beta_n$.
Montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de n.
3. Utilisez les résultats précédents pour exprimer α_n et β_n en fonction de n. Explicitez finalement A^n.