Chapitre 12

Quelques lois usuelles discrètes

12.1 Loi uniforme

Définition 12.1 (Loi Uniforme)
Dire qu'une VAR X suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ signifie que

$$X(\Omega) = [\![1;n]\!] \quad \forall k \in [\![1;n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On notera $X \hookrightarrow U_{[\![1;n]\!]}$.

Situation caractéristique : Tous les éventualités sont équiprobables.

Point Méthode :
Considérons un dé à 6 faces équilibré. Soit X la VAR égale à la face obtenue au cours d'un lancer.
Rédaction :
On lance une fois un dé et les résultats obtenus, de 1 à 6, sont tous équiprobables. Donc X, la VAR égale au résultat obtenu, suit une loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$ et $\forall k \in [\![1;6]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{6}$.

Proposition 12.1 (Espérance et Variance)
Si $X \hookrightarrow U_{[\![1;n]\!]}$ alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

12.2 Schéma de Bernoulli

Définition 12.2 (Schéma de Bernoulli)
Soit $p \in]0;1[$. Dire qu'une VAR X suit un schéma de Bernoulli de paramètre p signifie que

$$X(\Omega) = \{0;1\} \text{ et } P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p$$

On notera $X \hookrightarrow B(1;p)$.

Situation caractéristique : Expérience répétée une fois avec 2 issues possibles, succès de probabilité p ou échec.

Point Méthode :
Timothé mange un morceau de galette des rois. Soit la VAR X égale à 1 s'il a la fève et 0 sinon. La probabilité d'avoir la fève est de $\frac{1}{8}$.
Rédaction :
Soit l'expérience "manger un morceau de galette des rois".
A cette expérience, 2 issues sont possibles :

- soit Tim a la fève avec la probabilité $\frac{1}{8}$,
- soit Tim ne l'a pas avec la probabilité $\frac{7}{8}$.

X est la VAR égale à 1 si Tim a la fève et 0 sinon.
Donc X suit un schéma de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{8}$, ainsi $P(X = 0) = \frac{7}{8}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{8}$.

Proposition 12.2 (Espérance et Variance)
Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ alors

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1 - p)$$

12.3 Loi binomiale

Définition 12.3 (Loi binomiale)
Soit n un entier naturel non nul et $p \in]0; 1[$. Dire qu'une VAR X suit une loi binomiale de taille n et de paramètre p signifie que

$$X(\Omega) = [\![0; n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0; n]\!],\ P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On notera $X \hookrightarrow B(n; p)$.

Situation caractéristique : Expérience répétée n fois dans des conditions identiques et indépendantes avec, à chaque fois, 2 issues possibles, succès de probabilité p ou échec.

Point Méthode :
On tire successivement et avec remise 11 boules dans une urne contenant 4 boules bleues et 2 boules rouges.
Soit la VAR X égale au nombre de boules bleues obtenues lors des 11 tirages.
Rédaction :
Soit l'expérience "tirer une boule dans l'urne".
A cette expérience, 2 issues sont possibles :

- soit elle est bleue avec la probabilité $\frac{2}{3}$,
- soit elle est rouge avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On la répète 11 fois dans des conditions identiques et indépendantes.
X comptabilise le nombre de boules bleues obtenues.
Donc $X \hookrightarrow B\left(11; \frac{2}{3}\right)$.

$$\forall k \in [\![0; 11]\!],\ P(X = k) = \begin{pmatrix} 11 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k}$$

Proposition 12.3 (Espérance et Variance)
Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p)$$

Proposition 12.4 (Somme de 2 VAR)
Soient X_1 et X_2 deux VAR ***indépendantes*** *qui suivent respectivement les lois binomiales de* ***même paramètre*** *p, $\mathcal{B}(n_1,p)$ et $\mathcal{B}(n_2,p)$*
alors $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n_1+n_2,p)$

12.4 Loi hypergéométrique

Point Méthode :
On tire sans remise 8 boules dans une urne contenant 7 boules bleues et 3 rouges.
Soit X la VAR égale au nombre de boules bleues obtenues.
Rédaction :
L'urne contient 2 types d'éléments : 7 bleues et 3 rouges soit 10 boules. On effectue 8 tirages sans remise avec $8 \leq 10$.
X comptabilise le nombre de boules bleues obtenues, donc $X \hookrightarrow \mathcal{H}(10, 8, \frac{7}{10})$.

$$\forall k \in [\![5;7]\!], P(X=k) = \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 8-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}}$$

Définition 12.4 (Loi hypergéométrique)
Soient n et N deux entiers tels que $n \leqslant N$ et p un réel appartenant à $]0;1[$ tel que Np soit un nombre entier.
Dire qu'une var finie X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n, p signifie que $X(\Omega) = [\![\max(0, n-(N-Np)), \min(Np,n)]\!]$ et

$$\forall k \in X(\Omega),\ P(X=k) = \frac{\begin{pmatrix} Np \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-Np \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}}$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$.

Situation caractéristique : Soit un ensemble à N éléments constitué de deux types d'éléments : Np sont de type 1 et $N - Np$ sont de type 2. On effectue n tirage sans remise (ou on tire simultanément n éléments). Alors X la VAR égale au nombre d'éléments de type 1 piochés suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$.

Proposition 12.5 (Espérance)
Si X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ alors

$$E(X) = np$$

Fiche 17 - Quelques lois usuelles discrètes

Exercice 1
Un test consiste à répondre à 5 questions. Pour chaque question 3 réponses sont proposées dont une seule est juste. Un candidat répond au hasard. Chaque réponse juste rapporte 4 points ; chaque réponse fausse coûte 2 points.
Soient B le nombre de réponse bonnes, S la somme des points marqués par le candidat et $X = max(0; S)$.
Quelle est la loi suivie par B ? Etablir la loi de S. Etablir celle de X et calculer $E(X)$.

Exercice 2
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules avec remise.
S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3.
Soit X le nombre de boules blanches et Y le nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de X, puis $E(X)$ et $V(X)$. Exprimer Y en fonction de X. En déduire la loi de Y, puis $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. Déterminer la loi de X, puis $E(X)$ si l'on suppose que le jeu est sans remise.

Exercice 3
Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique.
Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = \dfrac{1}{4}$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi. Définir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$. Calculer $V(X)$.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés. Définir la loi de M. Donner explicitement cette loi. Calculer $E(M)$.

Exercice 4
Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée ($c \geqslant 1$).
On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définies par $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au $i^{ème}$ tirage et $X_i = 0$ sinon.
On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p par : $Z_p = X_1 + \cdots + X_p$.

1. Donner la loi de X_1 ainsi que $E(X_1)$.
2. Déterminer la loi de X_2 puis $E(X_2)$.
3. Que représente la variable Z_p ? Déterminer $Z_p(\Omega)$ ainsi que la loi de Z_2.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer très soigneusement $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
5. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(X_{p+1} = 1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}$
6. En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ (par récurrence en posant $(\mathcal{P}_p)$: $X_1, .., X_p$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$)

Exercice 5
Une urne contient 4 boules blanches et 4 noires. On effectue des tirages successifs sans remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 1-ère boule blanche.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2-ième boule blanche. Déterminer la loi de X_2.

Programme de Colle 15

Bijections
- Définition de bijection et de fonction réciproque.
- Théorème de la bijection continue.
- Dérivée de la fonction réciproque.

Lois discrètes usuelles
- Loi uniforme (définition, espérance, variance, exemple caractéristique)
- Loi de Bernoulli (définition, espérance, variance, exemple caractéristique)
- Loi binomiale (définition, espérance, variance, exemple caractéristique, lien Bernoulli - binomiale, somme)
- Loi hypergéométrique (Définition, espérance, exemple caractéristique)

Exercices possibles Exercices 1 à 5 semaine 14

Exercice 1
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement n boules avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3.
Soit X_n le nombre de boules blanches et Y_n le nombre de points obtenus.
Déterminer la loi de X_n. Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

Exercice 2
Une urne contient 3 boules bleues, 2 vertes, 5 rouges.
On tire une à une, avec remise 3 boules de cette urne. Soit N la VAR égale au nombre de boules bleues tirées. Quelle est la loi de N ? Préciser $E(N)$ et $V(N)$.
On tire simultanément 3 boules de cette urne. Soit X le nombre de boules bleues tirées. Etablir la loi de X. Préciser $E(X)$. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de la même couleur. Quelle est la probabilité de tirer 1 boule de chaque couleur. Quelle est la probabilité de tirer 2 boules au moins de la même couleur.

Exercice 3
1. On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question, k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses. On lui attribue un point par bonne réponse.
   Soit X_1 le nombre de points obtenus. Déterminez la loi de X_1.
2. Déterminez k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

Exercice 4
Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 2000 mètres à la vitesse de 10 kilomètres par heure. Il doit franchir 10 obstacles, indépendants les uns des autres. La probabilité de franchir un obstacle sans faute est de $\frac{3}{5}$.
1. On note X la variable aléatoire qui désigne le nombre d'obstacles franchis sans fautes par le cavalier. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance.
2. On suppose que si un obstacle est franchi sans faute, le cavalier ne perd pas de temps, dans le cas contraire, le cavalier perd une minute. Soit T la variable aléatoire égale à la durée en minutes du parcours. Exprimer T en fonction de X, en déduire la durée moyenne d'un parcours.