Chapitre 11

Bijections

11.1 Applications

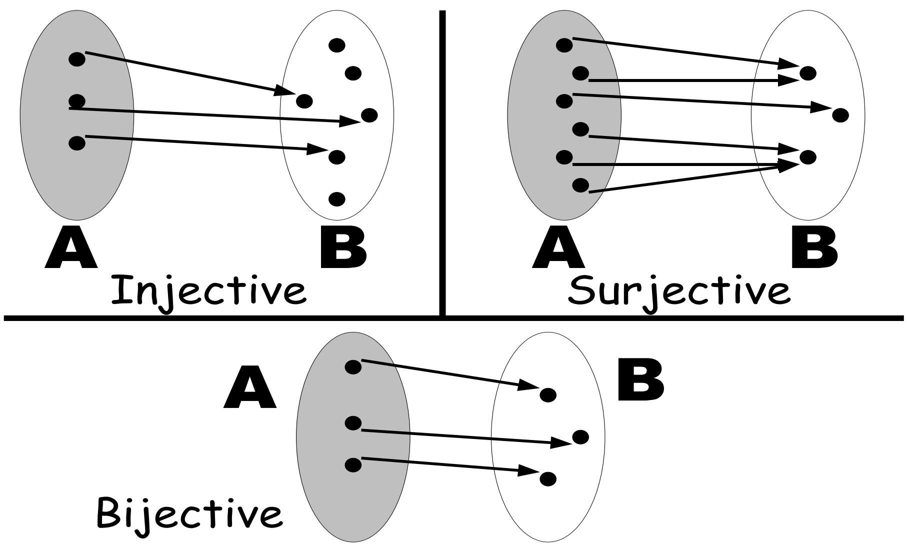
Définition 11.1 (Application)
Soient A et B deux ensembles. On appelle application de A vers B une fonction définie sur A telle que tout élément de A possède une unique image dans B.

Remarque : On ne dira pas "f est une application" mais plutôt "f est une application de A vers B". A est alors l'ensemble de définition et B l'ensemble d'arrivée de f.

Définition 11.2 (Image directe)
Soit f une application de A vers B.
Soit $X \subset A$, l'image directe de X par f est $f(X) = \{f(x) \in B \text{ tel que } x \in X\}$.

Définition 11.3 (Application bijective, injective, surjective)
Soit f une application de A vers B.

1. *Dire que f est injective signifie que tout élément de B a au plus un antécédent dans A autrement dit $\forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A$, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.*
2. *Dire que f est surjective signifie que tout élément de B a au moins un antécédent dans A autrement dit que B est l'ensemble image de A par f.*
3. *Dire que f est bijective signifie que tout élément de B a un unique antécédent dans A. Dans ce cas f possède une application réciproque de B vers A notée f^{-1}*



Théorème 11.1
Soit f une application de A vers B.
f est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

Remarque : Si f est une application bijective de A vers B avec A comportant un nombre fini d'éléments, alors B comporte le même nombre fini d'éléments.

11.2 Bijection de I sur J

Définition 11.4 (Bijection et fonction réciproque)
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.

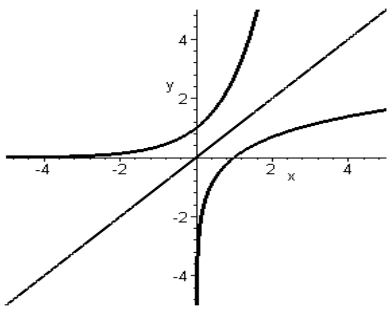
- *Dire que f réalise une bijection de I sur J signifie que*
  - $f(I) = J$
  - *tout élément de J possède un unique antécédent par f appartenant à I.*
- *Si f réalise une bijection de I sur J,*
  on note f^{-1} la fonction définie sur J qui à un élément y de J associe son unique antécédent appartenant à I.

  $$\forall y \in J \text{ et } \forall x \in I, \text{ on a } x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

  La fonction f^{-1} s'appelle la fonction réciproque de f

Remarque : Soient f une bijection de I sur J, $x \in I$ et $y \in J$. Dire que x est **l'**antécédent de y par f signifie que x est l'image de y par f^{-1}.

Exemple : La fonction logarithme népérien est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est la fonction exponentielle.



Remarque : Les représentations graphiques d'une fonction et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

11.3 Propriétés

Proposition 11.1
Si f réalise une bijection de I sur J alors f^{-1} réalise une bijection de J sur I et sa réciproque est f ce que l'on peut traduire par

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

<u>*Schéma*</u> :

$$I \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} J$$

Proposition 11.2
Si f réalise une bijection de I sur J et g réalise une bijection de J sur K alors $g \circ f$ réalise une bijection de I sur K et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

<u>*Schéma*</u> :

$$I \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} J \underset{g^{-1}}{\overset{g}{\rightleftarrows}} K$$

11.4 Théorème de la bijection continue

Théorème 11.2 (Théorème de la bijection continue)
Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I,
alors

1. *f réalise une bijection de I sur $f(I)$*
2. *l'intervalle $f(I)$ est de même nature que I (c'est-à-dire ouvert, fermé ou semi-ouvert comme I)*
3. *les bornes de $f(I)$ sont les limites de f aux bornes de I*
4. *f^{-1} est continue sur $f(I)$,*
5. *f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et sa monotonie est celle de f.*

<u>***Exemple***</u> :
La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue et stritement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\ln(\mathbb{R}_+^*)$.
Déterminons $\ln(\mathbb{R}_+^*)$.
On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
Donc $\ln(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.
Ainsi on pose $x \mapsto e^x$ sa bijection réciproque.
Elle est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 11.3 (Réciproque)
Si f est continue sur I et réalise une bijection de I sur $f(I)$ alors f est strictement monotone sur I.

<u>Equation du type $f(x) = k$</u> :
On a f continue et strictement monotone sur I.
Donc f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Or $k \in f(I)$
Donc k admet un unique antécédent dans I par f.
Donc $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Equation du type $f(x) = k$ et encadrement de la solution :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(E_n) : nx = 1 - x^5$.
Montrons que (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Soit la fonction $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Montrons dès lors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution que l'on notera x_n.
On peut montrer facilement que f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Or $0 \in \mathbb{R}$
Donc 0 admet un unique antécédent par f_n dans $\mathbb{R}$.
Donc $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera x_n.

Montrons maintentant que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < \frac{1}{n}$.
On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^5 > 0$
Donc $f_n(0) < 0 < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$
D'où $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right)$
Or f_n est croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x_n < \frac{1}{n}$.

Point Méthode :

- Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a; b]$.
  Alors $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.
- Soit f une fonction continue et strictement décroissante sur $[a; b]$.
  Alors $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$.

11.5 Dérivée

Proposition 11.3 (Dérivée de la fonction réciproque)
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$ (c'est-à-dire que $x_0 = f^{-1}(y_0)$).

1. *Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et*
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
2. *Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et sa courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ possède une tangente verticale au point d'abscisse y_0.*

Remarque : Par conséquent, pour calculer la dérivée de la réciproque en un point, il faut déja commencer par rechercher son antécédent !

Dérivée de la fonction réciproque : Soit $h : x \mapsto x^3 + 2, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
h est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Alors h est bijective et on note h^{-1} sa bijection réciproque.

- h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée jamais nulle sur $\mathbb{R}^*$.
  Donc h^{-1} est dérivable sur $h(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R} - \{2\}$.

- Calculons $(h^{-1})'(10)$.
  - Le nombre $10 \in \mathbb{R} - \{2\}$ donc h^{-1} est dérivable en 10.
  - Déterminons l'antécédent de 10 par h pour cela résolvons $h(x) = 10$:

$$x^3 + 2 = 10$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

  - Calculons $(h^{-1})'(10)$:

$$(h^{-1})'(10) = \frac{1}{h'(2)} = \frac{1}{3 \times 2^2} = \frac{1}{12}$$

Fiche 16 - Bijections

Exercice 1
Démontrer que les fonctions suivantes f réalisent une bijection de l'intervalle I donné sur l'intervalle f(I) que l'on précisera. Enoncer les propriétés de f^{-1} et donner son tableau de variation.

1. $$f(x) = \frac{3x-1}{x-2} \text{ avec } I =]2; +\infty[$$
2. $$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \text{ avec } I = [0; 1]$$
3. $f(x) = \ln(2-x) - \ln(x+2)$ sur son ensemble de définition à préciser.
4. $$f(x) = e^{2x} - e^{-x} + x \text{ avec } I = \mathbb{R}$$
5. $$f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} \text{ avec } \mathbb{R}$$

Exercice 2
Montrer que les équations suivantes possède une unique solution dans l'intervalle I

1. $I = [-1, 1]$ et $x^5 - x^4 = -1$
2. $I = [0, 1]$ et $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$

Exercice 3

1. Montrer que l'équation $3 - 2x = e^x$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
3. Est-ce que $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$?

Valeurs numériques :
$e = 2.718 \pm 10^{-3}$, $e^{1/2} \simeq 1.648 \pm 10^{-3}$

Exercice 4
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on considère l'équation (E)

$$(E) : x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$$

1. Démontrer que (E) admet une unique solution qu'on notera a_n.
2. Justifer que $a_n < \frac{1}{n}$.

Exercice 5
Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \ln(x)$.
On prendra $\ln(2) \simeq 0.69$.

1. (a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ sur un intervalle à préciser.
   (b) Enoncer les propriétés de f^{-1} et donner son tableau de variation.
2. Justifier que l'équation $x + \ln(x) = 0$ admet une unique solution qu'on notera α.
3. Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que l'équation
$$x + \ln(x) = \frac{1}{n}$$
admet une et une seule solution, notée α_n.

Exercice 6
On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \ln(x) - \ln(1-x)$$

1. Déterminer D_f et prouver que f réalise une bijection de D_f sur $\mathbb{R}$.
2. Enoncer toutes les propriétés de f^{-1} (dérivabilité comprise) et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$

Exercice 7
On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto 2\sqrt{x} - x + 3$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un intervalle à préciser.
2. Enoncer toutes les propriétés de f^{-1} (dérivabilité comprise) et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{15}{4}\right)$

Exercice 8
On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur un intervalle J à expliciter.
2. On note g sa réciproque. Donner le domaine de définition de g ainsi que ses variations.
3. Déterminer l'intervalle de dérivabilité de g.
4. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? en $\dfrac{1}{3}$? en $-\dfrac{2}{3}$? en $\dfrac{3}{13}$? en -1 ? Si oui, calculer les dérivées correspondantes.
5. Tracer les représentations graphiques de f et g dans le même repère.

Programme de Colle 14

Résolution de systèmes linéaires

- Définitions (système homogène, carré, triangulaire, de Cramer)
- *Méthode* : pivot de Gauss

Bijections

- Définition de bijection et de fonction réciproque.
- Théorème de la bijection continue.
- Dérivée de la fonction réciproque.

Exercices possibles Exercices 1 à 8 semaine 13

Exercice 1
Démontrer que les fonctions suivantes f réalisent une bijection de l'intervalle I donné sur l'intervalle $f(I)$ que l'on précisera. Enoncer les propriétés de f^{-1}.

1. Avec $I =]\frac{2}{3}; +\infty[$,
$$f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$$
.
2. Avec $I = [-1; 0]$,
$$f(x) = \frac{2x^2+1}{4x^2+1}$$
3. Avec $I = \mathbb{R}$
$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

Exercice 2
Montrer que les équations suivantes possède une solution dans l'intervalle I

1. Avec $I = [1, 10]$,
$$\ln x = \frac{x^2-5}{x+2}$$
2. Avec $I = [\ln 2, 2\ln 2]$,
$$e^x = 2 + x$$

Exercice 3
On note (E_n) l'équation
$$(E_n) : \frac{x^3}{x^2+1} = n$$

1. Soit f la fonction définie pour x réel par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$
   (a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
   (b) Enoncer les propriétés de f^{-1} et donner son tableau de variation.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'équation (E_n) possède une unique solution, notée x_n, sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4
On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + x, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n.

Exercice 5
Posons pour chaque entier $n \geqslant 2$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle à expliciter.
2. Montrer que, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette racine.