Chapitre 10

Systèmes d'équations linéaires

10.1 Définitions

Système :

Soient p et n deux nombres entiers non-nuls.
On appelle système d'équations linéaires de n équations à p inconnues (appelé aussi système $n \times p$) un système de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{rl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + .. + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + .. + a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + .. + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

où les $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des nombres réels et $x_1, .., x_p$ les inconnues,
$a_{i,j}$ s'appelle le coefficient de la $j^{ème}$ inconnue x_j dans la $i^{ème}$ équation (L_i).

Système carré :

Si $n = p$, on dit que le système (S) est carré d'ordre n.

Système homogène :

On dit que le système (S) est homogène (ou sans second membre)
si seulement si $b_1 = \cdots = b_n = 0$.
Dans ce cas, $(0; \cdots; 0)$ est solution de (S).

Système homogène associé :

On appelle système homogène associé à (S) le système obtenu à partir de (S) en remplaçant tous les nombres b_i par 0.

Solution d'un système :

Résoudre un système, c'est déterminer toutes les listes de nombre réels $(x_1, .., x_p)$ vérifiant simultanément les n équations $L_1, .., L_n$.

Système équivalents :

On dit que deux systèmes (S) et (S') sont équivalents si et seulement si ils ont les mêmes solutions

Définition 10.1 (Système triangulaire)
On dit qu'un système (S) est triangulaire si et seulement si
$\forall i \in \{1; ..; n\}$, $\forall j \in \{1; ..; p\}$ *avec* $i > j$ *on a* $a_{i,j} = 0$.

Autrement dit le système (S) est de la forme

$$(S)\left\{\begin{array}{rl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 + ...a_{2,p}x_p = b_2 & (L_2) \\ a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 + .. + a_{3,p}x_p = b_3 & (L_3) \\ \ddots & \\ a_{n,n}x_n + .. + a_{n,p}x_p = b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

Définition 10.2 (Opérations élémentaires)
Soit (S) un système $n\times p$. On appelle opération élémentaire l'une des trois opérations suivantes.

1. *L'échange de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i et de la $j^{\text{ème}}$ ligne L_j se note $L_i \quad \to L_j$*
2. *Soit λ un nombre réel* ***non-nul****.*
   Le remplacement de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par la ligne λL_i se note $L_i \qquad \lambda L_i$
   (on a multilplie la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par λ).
3. *Soit λ un nombre réel* ***quelconque****.*
   Le remplacement de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$ se note $L_i \qquad L_i + \lambda L_j$
   (on a multilplie la $j^{\text{ème}}$ ligne L_j par λ et on a ajouté le résultat à la $i^{\text{ème}}$ ligne)

Théorème 10.1
Tout système obtenu à partir de (S) en transformant l'une des ses équations par une transformation élémentaire est équivalent à (S).

10.2 Résolution des systèmes

10.2.1 Pivot de Gauss

C'est la méthode fondamentale dans la résolution des systèmes linéaires.
Elle utilise les opérations élémentaires précédentes et permet d'obtenir des systèmes équivalents autrement dit qui ont exactement le même ensemble de solutions.

Exemple :
Résolvons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{llllll} \boxed{\mathbf{1}}\,x & +y & +z & = & 6 & (L_1) \\ 2x & -y & +z & = & 3 & (L_2) \\ 3x & & -z & = & 0 & (L_3) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +y & +z & = & 6 & (L_1) \\ & \boxed{\mathbf{-3}}\,y & -z & = & -9 & (L_2 \quad - L_2 - 2L_1) \\ & -3y & -4z & = & -18 & (L_3 \quad - L_3 - 3L_1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +y & +z & = & 6 & (L_1) \\ & -3y & -z & = & -9 & (L_2) \\ & & -3z & = & -9 & (L_3 \quad - L_3 - L_2) \end{array}\right.$$

Après la descente, on obtient un système triangulaire.
On peut maintenant effectuer la remontée.

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & +3 & = & 6 \\ & -3y & -3 & = & -9 \\ & & z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +2 & +3 & = & 6 \\ & & y & = & 2 \\ & & z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}\right.$$

Finalement le système a une unique solution $(1, 2, 3)$. Autrement dit l'ensemble des solutions est $\{(1, 2, 3)\}$.

10.2.2 Forme générale des solutions

Soit (S) un système de taille $n \times p$. Le pivot de Gauss permet d'obtenir un système (S') équivalent au système (S) de la forme suivante :

$$(S')\left\{\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + ... + a'_{1,p}x_p = b'_1 \\ \ddots \\ a'_{r,r}x_r + .. + a'_{r,p}x_p = b'_r \end{array}\right\} \text{équations principales} \\ \left.\begin{array}{r} 0 \quad = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 \quad = b'_n \end{array}\right\} \text{équations auxiliaires} \end{array}\right.$$

Alors le système (S) admet des solutions si et seulement si toutes les équations auxiliaires sont vérifiées.
Si une des équations auxiliaires n'est pas vérifiée, il n'y a pas de solutions au système.

Supposons que dans (S'), toutes les équations auxiliaires soient vérifiées.
Ainsi (S'), et a fortiori (S), est équivalent au système suivant :

$$(S')\left\{\begin{array}{rl} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + ... + a'_{1,p}x_p = b'_1 & (L_1) \\ \ddots & \\ a'_{r,r}x_r + .. + a'_{r,p}x_p = b'_r & (L_r) \end{array}\right.$$

avec $a'_{i,i} \neq 0 \ \forall i \in \{1; ..; r\}$.

1. Puisque $a'_{r,r} \neq 0$, on peut donc exprimer x_r en fonction de $x_{r+1}, .., x_p$.
2. On substitue x_r dans (L_{r-1}) et puisque $a'_{r-1,r-1} \neq 0$, on exprime x_{r-1} en fonction de $x_{r+1}, .., x_p$.
3. On itère le processus et on obtient au final que (S) est équivalent à un système (S'') de la forme

$$(S'')\left\{\begin{array}{l} x_1 = a''_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a''_{1,p}x_p + b''_1 \\ x_2 = a''_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a''_{2,p}x_p + b''_2 \\ \qquad \ddots \\ x_r = a''_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a''_{r,p}x_p + b''_r \end{array}\right.$$

et les variables auxiliaires $x_{r+1}, .., x_p$ pouvant prendre toutes les valeurs réelles.

Ainsi l'ensemble des solutions du systèmes (S) est

$$\left\{ \begin{pmatrix} a''_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a''_{1,p}x_p + b''_1 \\ \vdots \\ a''_{r,r+1}x_{r+1} + ... + a''_{r,p}x_p + b''_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \ x_{r+1} \in \mathbb{R}, .., x_p \in \mathbb{R} \right\}$$

Il y a donc ici une infinité de solutions.

Exemple :
Résolvons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \boxed{\mathbf{2}}\,x & +2y & -z & +t & = & 6 & (L_1) \\ x & +4y & -2z & +2t & = & 3 & (L_2) \\ 3x & -2y & +z & -t & = & 9 & (L_3) \\ & -4y & +2z & -2t & = & 0 & (L_4) \\ x & +2y & -z & +t & = & 3 & (L_5) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 2x & +2y & -z & +t & = & 6 & \\ & \boxed{\mathbf{6}}\,y & -3z & +3t & = & 0 & (L_2 \quad 2L_2 - L_1) \\ & -10y & +5z & -5t & = & 0 & (L_3 \quad 2L_3 - 3L_1) \\ & -4y & +2z & -2t & = & 0 & (L_4 \quad L_4) \\ & +2y & -z & +t & = & 0 & (L_5 \quad 2L_5 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 2x & +2y & -z & +t & = & 6 & \\ & 6y & -3z & +3t & = & 0 & \\ & & & 0 & = & 0 & (L_3 \quad 3L_3 + 5L_2) \\ & & & 0 & = & 0 & (L_4 \quad 3L_4 + 2L_2) \\ & & & 0 & = & 0 & (L_5 \quad 3L_5 - L_2) \end{array}\right.$$

Les trois équations auxiliaires sont vérifiées, le système est donc équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{llllll} 2x & +2y & -z & +t & = & 6 \\ & 6y & -3z & +3t & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire contenant deux inconnues principales x et y et des inconnues auxiliaires z et t.

$$\left\{\begin{array}{llllll} 2x & +2y & = & 6 & +z & -t \\ & 6y & = & & 3z & -3t \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & +2y & = & 6 + z - t \\ & y & = & \frac{1}{2}(z-t) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3 \\ y & = & \frac{1}{2}(z-t) \end{array}\right.$$

Finalement l'ensemble des solutions est $\left\{\left(3, \frac{1}{2}(z-t), z, t\right),\ z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\right\}$.

10.2.3 Systèmes de Cramer

Reprenons le système (S') dans le cas où $n = p$ et voyons le cas particulier où il n'y a pas d'équations auxiliaires autrement dit $r = n$.

$$(S') \left\{\begin{array}{r} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \dots + a'_{1,n}x_n = b'_1 \\ \ddots \qquad \\ a'_{n,n}x_n = b'_n \end{array}\right.$$

La remontée nous montre que ce système admet une unique solution.

Définition 10.3 (Système de Cramer)
Dire qu'un système carré est de Cramer signifie qu'il possède une unique solution.

Théorème 10.2
Un système (S) carré d'ordre n est de Cramer si et seulement si le pivot de Gauss fait apparaître n pivots successifs non-nuls.

Proposition 10.1
Un système (S) carré d'ordre n et homogène est de Cramer si et seulement s'il possède comme unique solution $(0; ..; 0)$.

Proposition 10.2
Un système est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est de Cramer.

Fiche 15 - Systèmes linéaires

Exercice 1
Les systèmes suivant sont-ils résolubles. Si oui, expliciter les solutions :

1. $$\left\{\begin{array}{c} -x-y+2z=-1 \\ 3x+2y-4z=1 \\ x+3y-6z=5 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{c} 2x-3y=8 \\ 4x-5y+z=15 \\ 2x+4z=1 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{c} 2a+b+c-3d=1 \\ a-2b+c+d=-2 \\ -a+b+5c=1 \\ 3a-2b-c-d=-2 \\ 2a-b+c-d=-1 \end{array}\right.$$

4. $$\left\{\begin{array}{c} x-y-z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right.$$

5. $$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=-5 \\ 2x+13y-7z=-1 \\ x-y+z=1 \end{array}\right.$$

6. $$\left\{\begin{array}{c} 3x+2y+2z=1 \\ 4x-y+3z=-1 \\ 2x+5y+z=1 \end{array}\right.$$

7. $$\left\{\begin{array}{c} y+z+t=-1 \\ x+z+t=0 \\ x+y+t=1 \\ x+y+z=2 \end{array}\right.$$

8. $$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z+t=-5 \\ 2x+3y-3z+t=-1 \\ x-y+z-t=1 \end{array}\right.$$

9. $$\left\{\begin{array}{c} x+y+z+t=1 \\ 2x+y-z+t=4 \\ x-y+2z-t=-2 \\ 3x+y+z=0 \end{array}\right.$$

10. $$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=3 \\ x-y+3z=8 \\ x+2y-z=-3 \\ x+y+2z=-1 \end{array}\right.$$

11. $$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ 2x+3y+2z=2 \\ -x+y-2z=7 \\ 3x-4y-3z=4 \end{array}\right.$$

12. $$\left\{\begin{array}{c} x+y-3z-t=0 \\ 2x+y-5z+4t=4 \\ x-2y+3t=-2 \\ -x+y+z-2t=1 \end{array}\right.$$

13. $$\left\{\begin{array}{c} 2x-3y=8 \\ 4x-5y+z=15 \\ 2x+4z=1 \end{array}\right.$$

Exercice 2
Résoudre par la méthode du pivot en discutant suivant la valeur du paramètre λ les systèmes suivants. *(Indication : on pourra échanger des lignes afin de manipuler un pivot fonction de λ le plus tard possible)*

1. $$(E_\lambda) : \left\{\begin{array}{l} (1-\lambda)x+y=0 \\ -x+(2-\lambda)y+z=0 \\ x+(1-\lambda)z=0 \end{array}\right.$$

2. $$(E_\lambda) : \left\{\begin{array}{l} (2-\lambda)x+y+z=0 \\ x+(2-\lambda)y+z=0 \\ x+y+(2-\lambda)z=0 \end{array}\right.$$

3. $$(E_\lambda) : \left\{\begin{array}{l} (1-\lambda)x+y+z=0 \\ x+(1-\lambda)y+z=0 \\ x+y+(1-\lambda)z=0 \end{array}\right.$$

Exercice 3
Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 3 vérifiant

$$P(1)=P(-2)=1$$
$$P'(1)=1$$

Exercice 4
Soient a et b deux réels.
On considère le système

$$(E_{(a,b)}) : \left\{\begin{array}{l} ax+2y-z=1 \\ -x+3y+z=b \\ 2x-7y+3z=-2 \end{array}\right.$$

Résoudre le système selon les valeurs de a et de b.

Programme de Colle 13

Continuité et Dérivabilité

- Théorème de prolongement continu. Théorème de prolongement de la dérivée.
- Théorème des valeurs intermédiaires et propositions sur l'image par une fonction continue d'un intervalle. Inégalité des Accroissements finis. Lien entre convexité et propriétés des dérivées successives.

Résolution de systèmes linéaires

- Définitions (système homogène, carré, triangulaire, de Cramer)
- *Méthode* : pivot de Gauss

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 12

Exercice 1
Les systèmes suivant sont-ils résolubles. Si oui, expliciter les solutions :

1.
$$\begin{cases} x - 3y + 6z = 0 \\ 6x - 8y + 12z = 0 \\ 3x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 5 \\ -x - y - z = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x + 3y - z + t = 1 \\ 2x + 13y - 7z + 2t = 2 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 7y - 4z + t = -1 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} u + w = 1 \\ v + w = 0 \\ u + v = 12 \\ u + 3v = 0 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x + y - t = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ -y + z + t = 0 \\ x - z + t = 1 \end{cases}$$

Exercice 2
Résoudre les systèmes selon les valeurs de λ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.
$$(E_\lambda) : \begin{cases} (1-\lambda)x - 3y + 6z = 0 \\ 6x - (8+\lambda)y + 12z = 0 \\ 3x - 3y + (4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

2.
$$(F_\lambda) : \begin{cases} -\lambda x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - \lambda y - z = 0 \\ -x - y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

3.
$$(G_\lambda) : \begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases}$$