Chapitre 9

Continuité et Dérivabilité

I désigne un intervalle et x_0 un élément de I.
Soit f une fonction d'une variable réelle définie sur I.

9.1 Définition de la continuité

Définition 9.1 (Continuité en un point)

- *Dire que f est continue en x_0 signifie que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- *Dire que f est continue à gauche (resp. à droite) en x_0 signifie que*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \qquad \textit{resp. } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)\Big)$$

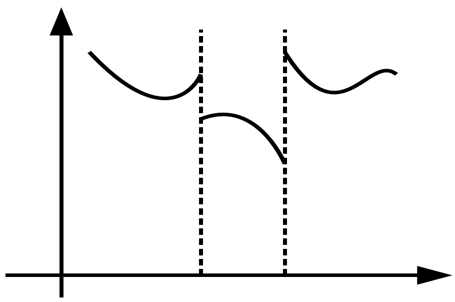
Définition 9.2 (Continuité sur un intervalle)

- *Dire que f est continue sur $]a;b[$ signifie qu'elle est continue en tout point x_0 de $]a;b[$.*
- *Dire que f est continue sur $[a;b]$ signifie qu'elle est continue sur $]a;b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.*

Notation : L'ensemble des fonctions continues sur I se note $\mathcal{C}(I)$.
Discontinuité : La fonction $x \mapsto E(x)$ (partie entière) est discontinue en tout x de $\mathbb{Z}$.

Théorème 9.1
f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

Définition 9.3 (Continue par morceaux)
Dire qu'une fonction f est continue par morceaux sur $[a;b]$ signifie que f est continue sur $[a;b]$ sauf peut-être en un nombre fini de valeurs en lesquelles elle possède des limites finies à gauche et droite (pas nécessairement égales)



9.2 Définition de la dérivabilité

Définition 9.4 (Dérivabilité en un point)

1. *Dire que f est dérivable en x_0 signifie que*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe et est finie.}$$

   Cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

2. *Dire que f est dérivable en x_0 signifie aussi qu'il existe un nombre réel A et une fonction ϵ définie sur I telles que*

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + \epsilon(x)(x-x_0) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$$

   Dans ce cas $A = f'(x_0)$.

Proposition 9.1 (Tangente)
Si f est dérivable en x_0, alors la représentation graphique de f possède une tangente (T) au point d'abscisse x_0 qui a pour équation

$$(T) : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

Définition 9.5 (Dérivées à gauche et à droite)

1. *Dire que f est dérivable à droite en x_0 signifie que*

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

   existe et est finie. Cette limite s'appelle la dérivée à droite de f en x_0 et se note $f'_d(x_0)$.

2. *Dire que f est dérivable à gauche en x_0 signifie que*

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0})$$

   existe et est finie. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée à gauche de f en x_0 et se note $f'_g(x_0)$.

Définition 9.6 (Dérivabilité sur un intervalle)

1. *Dire que f est dérivable sur $]a;b[$ signifie que f est dérivable en tout point x_0 appartenant à $]a;b[$.*
2. *Dire que f est dérivable sur $[a;b]$ signifie que f est dérivable en tout point x_0 appartenant à $]a;b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.*

Proposition 9.2 (Egalité des dérivées à gauche et à droite)
f est dérivable en $x_0 \in]a;b[$ ssi f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

Dans ce cas $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Proposition 9.3 (Dérivabilité et continuité)
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

Remarque :
Par contre, si f est continue en x_0 cela n'implique pas que f soit dérivable en x_0.

- $x \mapsto |x|$ est continue mais pas dérivable en 0. Sa dérivée à gauche vaut -1 et sa dérivée à droite vaut 1. Elles ne sont pas égales.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable. En effet :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

  Cette limite n'étant pas finie, la fonction n'est pas dérivable en 0.
  Par contre sa représentation graphique admet une demi-tangente verticale.

Proposition 9.4 (Tangente verticale)
Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est infinie alors la représentation graphique de f admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0.

Définition 9.7 (Fonction dérivée)
Si f est dérivable sur I, on peut définir la fonction dérivée f' par : $\forall x \in I,\ f'(x)$ est le nombre dérivée de f en x.

9.3 Fonctions de classe C^k

Définition 9.8 (Fonctions plusieurs fois dérivables)

1. *Dire que f est 2 fois dérivable sur I signifie que f est dérivable et f' est dérivable.*
   Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de la dérivée de f.
2. *Plus généralement, soit $k \in \mathbb{N}^*$, dire que f est k fois dérivable signifie que $\forall q \leqslant k-1$, $f^{(q)}$ est dérivable.*
   Dans ce cas, on note $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$

Exemple : Soit $P : x \mapsto x^5 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
P est autant de fois que l'on veut dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.
$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 6x + 2$
et $P''(x) = 20x^3 + 24x + 6$,
ainsi $P^{(3)}(x) = 60x^2 + 24$, ensuite $P^{(4)}(x) = 120x$, $P^{(5)}(x) = 120$, $P^{(6)}(x) = 0$...

Définition 9.9 (Fonctions de classe C^k)
Soit $k \in \mathbb{N}$, dire que f est de classe C^k sur I signifie que f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ continue sur I.
Dire que f est C^0 sur I signifie que f est continue sur I.

Définition 9.10 (Fonctions de classe C^∞)
Dire que f est de classe C^∞ sur I signifie que f est autant de fois que l'on veut dérivable sur I.

9.4 Opérations sur les fonctions

Théorème 9.2 (Fonctions de référence)

1. *Toute fonction polynôme est continue, dérivable sur* $\mathbb{R}$
2. *La fonction* $x \mapsto \ln x$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$
3. *La fonction* $x \mapsto e^x$*est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$
4. *La fonction puissance :*
   - *pour* $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$.
   - *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$.
   - *pour* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^\alpha$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 9.5 (Règles de calculs)

Sont continues (resp. dérivables) sur I :

- *la somme de deux fonctions continues (resp. dérivables) sur* I.
- *le produit de deux fonctions continues (resp. dérivables) sur* I.
- *la quotient de deux fonctions continues (resp. dérivables) sur* I *dont le dénominateur ne s'annule pas.*
- *l'exponentielle d'une fonction continue (resp. dérivables) sur* I.
- *le logarithme d'une fonction continue (resp. dérivables) sur* I *à valeurs strictement positives.*

Est continue sur I :

- *la racine carrée d'une fonction continue sur* I *à valeurs positives.*

Est dérivable sur I :

- *la racine carrée d'une fonction dérivable sur* I *à valeurs strictement positives.*

Ces règles de calcul restent vraies si l'on remplace partout le terme "dérivable" par "de classe C^k" ou "de classe C^∞".

Calcul des dérivées : En cas de dérivabilité,

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (\lambda u)' = \lambda u' \qquad (u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

Proposition 9.6 (Composition)

Soient f *une fonction continue (resp. dérivable) sur* I *et* g *une fonction continue (resp. dérivable) sur* $J \supset f(I)$) *alors* $g \circ f$ *est continue (resp. dérivable) sur* I.
En cas de dérivabilité, $\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$.

Calcul des dérivées composées : En cas de dérivabilité,

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u} \qquad (e^u)' = u'e^u \qquad (u^n)' = nu^{n-1} \times u' \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Soit u une fonction dérivable sur I qui ne s'annule pas sur I, alors $ln(|u|)$ est dérivable sur I et $(\ln(|u|))' = \frac{u'}{u}$.

Les 4 points méthodes :

Cas simple : $\forall x \in [1;5]$, $3x-1 \geq 0$.
Donc $x \mapsto \sqrt{3x-1}$ est continue sur $[1;5]$ en tant que racine carrée d'une fonction continue à valeurs positives.

Cas moins simple ! : Soit f la fonction définie sur $I =]1;2]$ par

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{2-x}\ln(x-1)}{x^2}$$

- Continuité sur I :
  $x \mapsto \ln(x-1)$ est continue sur I en tant que logarithme d'une fonction à valeurs strictement positives.
  $x \mapsto \sqrt{2-x}$ est continue sur I en tant que racine carrée d'une fonction continue à valeurs positives.
  Ainsi f est continue sur I en tant que produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Dérivabilité sur I :
  $x \mapsto \ln(x-1)$ est dérivable sur I en tant que logarithme d'une fonction à valeurs strictement positives.
  $x \mapsto \sqrt{2-x}$ est dérivable sur $I-2$ en tant que racine carrée d'une fonction dérivable à valeurs strictement positives.
  Ainsi f est dérivable sur $I-\{2\}$ en tant que produit et quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Une fonction définie par 2 formules sur 2 intervalles. :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{si } x > 1 \\ x-1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Pour montrer la continuité de f, il faut la montrer sur chacun des intervalles à l'aide des phrases puis montrer la continuité à droite en 1.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln(x^2) = 0 \text{ or } f(1) = 1-1 = 0 \text{ donc } \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Une fonction définie par 1 formule sur 1 intervalle et 1 valeur en 1 point. :

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)\ln(x-2)+3 & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Pour montrer la continuité de g, il faut la montrer sur l'intervalle à l'aide des phrases puis montrer la continuité à droite en 2.

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-2)\ln(x-2)+3 = 3 \text{ or } f(2) = 3 \text{ donc } \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

Donc f est continue sur $[2;+\infty[$.

9.5 Prolongements

Théorème 9.3 (de prolongement continu)
Soit f une fonction définie sur $I\backslash\{x_0\}$.
Si f est continue sur $I\backslash\{x_0\}$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.
Alors la fonction $\widetilde{f}$ définie par

$$\widetilde{f} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{c} f(x) \text{ si } x \in I\backslash\{x_0\} \\ l \text{ si } x = x_0 \end{array} \right.$$

est continue sur I. Elle s'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Remarque : La fonction $\widetilde{f}$ est la "grande soeur" de f. Elle coïncide avec f sur $I\backslash\{x_0\}$ mais est définie en plus en x_0.

Point Méthode : La fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc f est continue sur R_+^* en tant que produit de fonctions continues.
D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
Finalement la fonction f est prolongeable par continuité en 0 avec $\widetilde{f}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{c} \widetilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in I\backslash\{0\} \\ \widetilde{f}(0) = 0 \end{array} \right.$$

Théorème 9.4 (Théorème de prolongement de la dérivée)
Soit f une fonction continue sur I et de classe C^1 sur $I\backslash\{x_0\}$.
Si f' possède une limite réelle l en x_0,
alors f est de classe C^1 sur I et $f'(x_0) = l$ (en particulier f est dérivable en x_0).

Point Méthode :
Deux possibilités s'offrent à nous pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point : le théorème précédent ou la définition.

$$\text{Soit } f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 3x + 1 + x^2 ln(x^2) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. .$$

f est définie sur $\mathbb{R}$.

Etudions la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction $x \mapsto ln(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que logarithme d'une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables.

Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{3x + 1 + x^2 ln(x^2) - 1}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \left[3 + xln(x^2)\right] = \cdots = 3$$

Finalement la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 3$.
Comme f est dérivable en 0 et sur $\mathbb{R}^*$, on obtient que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

Par cette méthode, on a montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous **n**'avons **pas** montré que f est de classe C^1.
Pour ce faire, il faut recommencer l'exercice comme suit.

Montrons que f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction $x \mapsto ln(x^2)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en tant que logarithme d'une fonction C^1 et strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.
Donc f **est** C^1 **sur** $\mathbb{R}^*$ en tant que somme et produit de fonctions C^1.

Etudions la continuité de f en 0.
$\lim_{x\to 0} x^2 = 0^+$ et $\lim_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$ donc $\lim_{x\to 0} x^2 ln(x^2) = 0$.
Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$, or $f(0) = 1$,
par conséquent $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et f est continue en 0.
Comme f est continue en 0 et sur $\mathbb{R}^*$, on obtient que f **est continue sur** $\mathbb{R}$.

Calculons f'.
$f \in C^1(\mathbb{R}^*)$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = 3 + 2xln(x^2) + x^2\frac{2x}{x^2} = 3 + 2xln(x^2) + 2x$$

Après calcul, on obtient que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \cdots = 3$.

Finalement f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 3$.
Par le théorème de prolongement de la dérivée, on obtient que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 3$.

Remarque : La seconde méthode est plus longue. Le calcul de la limite de la dérivée est souvent plus long. Dès que l'énoncé le permet, il vaut mieux préféré la première méthode qui utilise la définition de dérivabilité en un point, le calcul de $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ étant très souvent plus simple.

9.6 Fonctions monotones

Proposition 9.7 (Extrêmum d'une fonction dérivable)
Si f est dérivable en x_0 et si f admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

Remarque : La réciproque est fausse. Par exemple $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum de f.

Proposition 9.8 (Extrêmum d'une fonction dérivable)
Si f est dérivable sur I et si f' s'annule en $x_0 \in I$, en changeant de signe alors f admet un extremum en x_0.

Proposition 9.9 (Sens de variation)
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

1. *f est constante sur $[a;b]$ si et seulement si $\forall x \in]a;b[$, $f'(x) = 0$*

2. *f est croissante sur $[a;b]$ si et seulement si $\forall x \in]a;b[$, $f'(x) \geqslant 0$*
3. *f est strictement croissante sur $[a;b]$ si et seulement si $\forall x \in]a;b[$, $f'(x) > 0$*
4. *f est décroissante sur $[a;b]$ si et seulement si $\forall x \in]a;b[$, $f'(x) \leq 0$*
5. *f est strictement décroissante sur $[a;b]$ si et seulement si $\forall x \in]a;b[$, $f'(x) < 0$*

9.7 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 9.10 (Théorème des valeurs intermédiaires)
Si f est continue sur $[a;b]$
Alors toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ possède au moins un antécédent par f dans $[a;b]$.

Proposition 9.11
- *Si f est continue sur un intervalle I*
  Alors $f(I)$ est un intervalle.
- *Si en outre I est un segment (ie. fermé borné, $I = [a;b]$) Alors $f([a;b])$ est aussi un segment.*

Corollaire 9.1
Si f est continue sur un segment,
Alors f y possède un maximum et un minimum.

Proposition 9.12
Si f est continue sur $[a;b]$ et est croissante (resp. décroissante) sur $]a;b[$
Alors f est croissante (resp. décroissante) sur $[a;b]$

9.8 Convexité

Définition 9.11 (Convexité)
Soit f une fonction C^1 sur I.

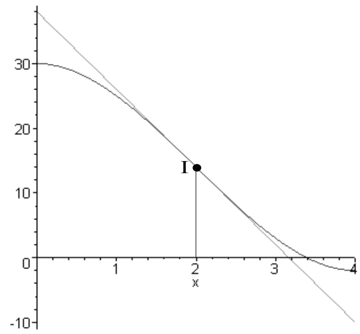
1. *Dire que f est convexe sur I signifie que la représentation graphique de f est au-dessus de ses tangentes en tout point de I.*
2. *Dire que f est concave sur I signifie que $-f$ est convexe sur I.*

Remarque : Etudier la convexité d'une fonction signifie préciser là où elle est convexe **et là où elle est concave**!

Proposition 9.13
1. *Supposons que f soit dérivable sur I. Alors f est convexe (resp. concave) ssi f' est croissante (resp. décroissante) sur I*
2. *Supposons que f soit de classe C^2 sur I. Alors f est convexe (resp. concave) ssi f'' est positive (resp. négative) sur I*

Définition 9.12 (Point d'inflexion)
On appelle point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ tout point où la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en ce point.

Proposition 9.14
Soit f une fonction de classe C^2 sur I. Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0 alors le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.



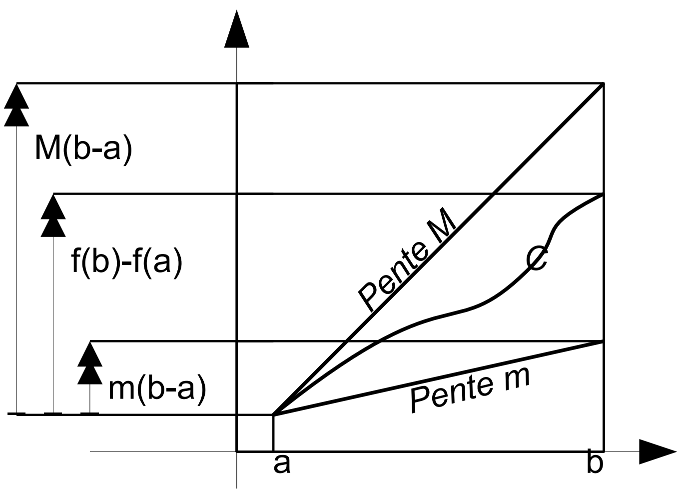
9.9 Inégalité des Accroissements Finis

Théorème 9.5 (Inégalité des Accroissements Finis)
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

1. *Supposons qu'il existe deux réels m et M tels que*
$$\forall x \in]a;b[\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$$
alors
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$
2. *Supposons qu'il existe un réel C tel que*
$$\forall x \in]a;b[\ |f'(x)| \leqslant C$$
alors
$$|f(b) - f(a)| \leqslant C\,|b-a|$$

Remarque : La dernière inégalité se généralise en prenant tout couple de nombres réels x et y de $[a;b]$:
$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|$$

Exemple : Soit $f : x \mapsto \ln(x)$. f est dérivable sur $[2;5]$ et $\forall x \in [2;5]$, on a $f'(x) = \frac{1}{x}$.
$\forall x \in [2;5]$,
$$2 \leq x \leq 5$$
$$\frac{1}{2} \geq f'(x) \geq \frac{1}{5}$$
Finalement, par l'inégalité des accroissements finis, on obtient :
$$\frac{1}{5}(5-2) \leq f(5) - f(2) \leq \frac{1}{2}(5-2)$$
$$\frac{3}{5} \leq f(5) - f(2) \leq \frac{3}{2}$$
$$\frac{3}{5} \leq \ln\left(\frac{5}{2}\right) \leq \frac{3}{2}$$



Fiche 13 - Continuité et dérivabilité

Exercice 1
Etudier la continuité sur leur ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$$
2. $$g(x) = \sqrt{-x^2+4x+12}$$
3. $$h(x) = \frac{1}{|x|-1}$$
4. $$i(x) = \sqrt{|x|-2}$$
5. $$j(x) = \ln\left((x-1)(2x^2-x-1)x^2\right)$$
6. $$k(x) = \ln(3+x) - \ln(4-2x) - ln3$$
7. $$l(x) = \ln(e^x+1)$$
8. $$m(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$$
9. $$n(x) = \frac{2x+3}{e^{4x}+5}$$
10. $$o(x) = \sqrt{-x^2+x-1}$$
11. $$p(x) = \frac{\ln(x^2-4x+3)}{e^x-e^{-2}}$$
12. $$q(x) = \begin{cases} 2x^2+3x-1 & si\ x < 1 \\ x^2-x & si\ x \geq 1 \end{cases}$$
13. $$r(x) = \begin{cases} \ln(2x) & si\ x > \frac{1}{2} \\ 2x^2-x & si\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$
14. $$s(x) = \begin{cases} x\ln(x)+2 & si\ x > 0 \\ 2 & si\ x = 0 \end{cases}$$
15. $$t(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{x} & si\ x \in \cdots \\ 2 & si\ x = 0 \end{cases}$$
16. $$u(x) = \begin{cases} \frac{\ln(3-2x)}{2(x-1)} & si\ x \in \cdots \\ -1 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 ($\star$)
Déterminer l'ensemble de définition, si elles sont dérivables puis calculer la dérivée.

$$a : x \mapsto (x^2+3x+5)$$
$$b : x \mapsto \frac{1-2x}{x^2-2x+3}$$
$$c : x \mapsto \ln\left(\frac{3x}{2-x}\right)$$
$$d : x \mapsto \ln\left(|\frac{3x}{2-x}|\right)$$
$$e : x \mapsto \sqrt{x-1}$$
$$f : x \mapsto \sqrt{1-4x^2}$$

Exercice 3 ($\star\star$)
Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur I. Quelles sont les fonctions qui sont dérivables sur I ? Expliciter la dérivée de chacune de ces fonctions sur son intervalle de dérivabilité.

1. $I = [-1; +\infty[$
$$f(x) = \sqrt{x+1}$$
2. $I = \mathbb{R}$ et
$$g(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
3. $I = [0, 2]$ et
$$h(x) = x\sqrt{2x-x^2}$$
4. $I = \mathbb{R}^+$ et
$$i(x) = \begin{cases} \frac{x\ln(3x+1)}{2x^2+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Programme de Colle 11

Dénombrement

- Combinaison, formules, triangle de Pascal, binôme de Newton,
- p-listes, arrangement, permutation.

Continuité et Dérivabilité

- Définition de continuité, de la dérivabilité et lien avec la continuité, fonctions de classe C^k, C^∞.
- Fonctions continues et dérivables de référence. Règles de calcul.

Exercices possibles
Exercices 1 à 3 semaine 10

Exercice 1
Calculer $\lim_{x\to x_0} f(x)$ dans chacun des cas suivants.

1. En $\pm\infty$,
$$f(x) = -x^2 + 3x - 1 + 2e^{-x}$$
2. En $\pm\infty$,
$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}$$
3. En $x_0 = 0$,
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x}$$
4. En $+\infty$,
$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$
5. En $+\infty$,
$$f(x) = \left[2x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]$$
6. En $\pm\infty$,
$$f(x) = \left[x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)\right]$$

Exercice 2
Etudier la continuité sur leur ensemble de définition des fonctions f.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{2x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2\sqrt{x}+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \in [-1;1] \setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3
Déterminer l'ensemble de définition, si elles sont C^∞ puis calculer la dérivée.

$$a(x) = \ln(1+x^2) \qquad b(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$$

$$c(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2} \qquad d(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$$

Exercice 4
Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur I. Quelles sont les fonctions qui sont dérivables sur I ? Expliciter la dérivée de chacune de ces fonctions sur son intervalle de dérivabilité.

1. $I =]-\infty, 1]$ et $c(x) = x\sqrt{1-x}$
2. $I = \mathbb{R}$ et $e(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$

Fiche 14 - Continuité et dérivabilité

Exercice 1
Etudier si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité aux points indiqués.

1. En 0, $f : x \mapsto \dfrac{e^{-3x}-1}{x^3+x}$
2. En 0, $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(\sqrt{1-2x}\right)}{1-e^{2x}}$
3. En 0 et en 1, $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{6-2x}-2}{4x^2-4x}$
4. En -5, $f : x \mapsto (x^2+5x)\ln(x+5) - 3x^2$

Exercice 2
Soit $f : x \mapsto 3x+1+x^2 ln(x^2)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est C^1 sur son ensemble de définition.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera $\tilde{f}$ son prolongement.
4. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Montrer que $f : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4
On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \ln(1+x^2)$ et C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

1. (a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variation de f.
   (c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer la nature des branches infinies de C.
4. Montrer que C admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
5. Tracer C. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à C en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

Exercice 5
Soit $f : x \mapsto \ln(-x^2+x+2)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Justifier que f est C^2 sur $]-1;2[$ et vérifier que $\forall x \in]-1;2[$, on a
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}$$
3. En déduire que $\forall x \in [0;1]$, on a : $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
4. Prouver que $\forall x \in [0;1]$, $|f(x) - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|x-1|$.

Exercice 6
Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} \text{ si } x>0 \\ 1 \text{ si } x=0. \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que $\forall x \in]0;+\infty[$,
$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$$
3. Étudier les variations de la fonction
$$g : [0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto xe^x - 2e^x + x + 2$$
En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[, f''(x) > 0$.
4. En déduire le sens de variation de f. On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.
5. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;+\infty[$.

Programme de Colle 12

<u>Continuité et Dérivabilité</u>

- Définition de continuité, de la dérivabilité et lien avec la continuité, fonctions de classe C^k, C^∞.
- Fonctions continues et dérivables de référence. Règles de calcul.
- Théorème de prolongement continu. Théorème de prolongement de la dérivée.
- Théorème des valeurs intermédiaires et propositions sur l'image par une fonction continue d'un intervalle.
- Inégalité des Accroissements finis.
- Lien entre convexité et propriétés des dérivées successives.

Exercices possibles
Exercices 1 à 6 semaine 11

Exercice 1
Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(4-3x)}{x^2-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
4. Etudier si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = 1$.

Exercice 2
Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-3x^2}-1}{x^2+x^4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
4. Etudier si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

Exercice 3
Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{6-2x}-2}{4x^2-4x}$$

Mêmes questions qu'à l'exercice précédent, on étudiera pour finir si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = 1$.

Exercice 4
Soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{7-x}-3}{x+2}$$

Mêmes questions qu'à l'exercice 3, on étudiera pour finir si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = -2$.

Exercice 5
Considérons les fonctions suivantes :

$$a(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$

$$b(x) = (x-2)\sqrt{2x-x^2}$$

$$c(x) = 1 + x\exp(\frac{1}{1-x})$$

$$d(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$$

1. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
2. Montrer qu'elles sont toutes continues sur leurs domaines de définition respectifs.
3. Déterminer les fonctions qui sont C^1 sur leurs domaines de définition respectifs.