Chapitre 8

Dénombrement

8.1 Equiprobabilité

Proposition 8.1 (Espace probabilisé des événements élémentaires)
Soit une probabilité définie sur la tribu des événements élémentaires.

1. *La somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1.*
2. *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.*
3. *En associant à chaque événement élémentaire un nombre positif, on définit une probabilité si la somme de ces nombres vaut 1.*

Définition 8.1 (Equiprobabilité)

1. *Dire que deux évènements sont équiprobables signifie qu'ils ont la même probabilité.*
2. *Dire qu'une probabilité est uniforme signifie que tous les évènements élémentaires sont équiprobables.*

Théorème 8.1 (Utilisation de l'équiprobabilité)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini tel que la probabilité P soit uniforme. Alors on a

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)\ P(A) = \frac{\text{nombre de cas où } A \text{ se réalise}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Remarque : Soit un dé équilibré à 20 faces numérotées de 1 à 20. On le lance une fois. Quelle est la probabilité P d'avoir un multiple de 3 ?
Il y a au total 20 faces et 6 faces comportant un mutliple de 3 (3, 6, 9, 12, 15, 18).

$$P = \frac{6}{20}$$

Il nous reste à apprendre à dénombrer des cas plus complexes.

8.2 Dénombrement de $\mathcal{P}(E)$

Théorème 8.2
Si E est un ensemble à n éléments alors le nombre de sous-ensembles de E est de 2^n

Exemple : $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$.
Le nombre de sous-ensembles de $\{1,2,3,4\}$, qui comporte 4 éléments, est de $2^4 = 16$.

8.3 Combinaisons

Exemple : Si $E = \{1; 2; 3; 4\}$ alors il y a 6 sous-ensembles à 2 éléments : on choisit un premier élément (4 choix) puis le second (3 choix) puis on ôte l'ordre (diviser par 2).

Proposition 8.2 (Combinaison de p parmi n)
Soit E un ensemble à n éléments.
$\binom{n}{p}$ *désigne le nombre de sous-ensembles à p éléments de E et vaut*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Situation caractéristique :
La combinaison de p parmi n dénombre les choix possibles de p éléments distincts parmi n, l'ordre n'ayant pas d'importance.
Autrement dit, nous sommes dans un cas où l'ordre dans lequel les éléments sont choisis n'a pas d'importance et où les répétitions ne sont pas autorisées.

Utilisation de l'équiprobabilité : Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches. On tire 5 boules simultanément.

1. Combien de tirages sont-ils possibles ?
2. Calculer la probabilité de A :"Le tirage comporte 3 noires et 2 blanches ?
3. Calculer la probabilité de B :"Le tirage comporte au plus une noire ?

Correction :

1. Faire un tirage revient à **choisir 5 boules parmi 7** soit $\binom{7}{5}$ tirages possibles.
2. Faire un tirage comportant 3 noires et 2 blanches revient à choisir 3 noires parmi 3 puis à choisir 2 blanches parmi 4 soit $\binom{3}{3} \times \binom{4}{2}$ tirages possibles. Dès lors on obtient par équiprobabilité,
$$P(A) = \frac{\binom{3}{3} \times \binom{4}{2}}{\binom{7}{5}} = 1 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{7}$$
3. Faire un tirage comportant au plus une noire revient à faire un tirage comportant une noire et 4 blanches autrement dit choisir une noire parmi 3 puis choisir 4 blanches parmi 4 donc $\binom{3}{1} \times \binom{4}{4}$ tirages possibles. Dès lors on obtient par équiprobabilité,
$$P(B) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{4}}{\binom{7}{5}} = \frac{3}{1} \times 1 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{1}{7}$$

Remarque : Le nombre de tirages possibles n'est pas le nombre de configurations possibles qui sont au nombre de 3 c'est-à-dire 1N/4B, 2N/3B, 3N/2B, mais qui ne sont pas équiprobables. Nous recherchons le nombre de tirages, les tirages étant équiprobables.

Proposition 8.3 (Factoriel)
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n! = n \times (n-1) \cdots \times 1 \qquad 0! = 1$$
$$(n+1)! = n! \times (n+1)$$
$$n! = (n-1)! \times n = (n-2)! \times (n-1) \times n$$

Proposition 8.4 (Formules)
$\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \in \{0; ..; n\}$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Théorème 8.3 (Triangle de Pascal)
Pour tous n et p deux nombres entiers positifs tels que $p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$\cdots$	p	$p+1$	$\ldots$	n	$n+1$
$n=0$	1										
$n=1$	1	1									
$n=2$	1	2	1								
$n=3$	1	3	3	1							
$n=4$	1	4	6	4	1						
$n=5$	1	5	10	10	5	$\ddots$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$					
n	1	n					$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{p+1}$		1	
$n+1$	1	$n+1$	$\ldots$				$\cdots$	$\binom{n+1}{p+1}$		$n+1$	1

Théorème 8.4 (Formule du binôme de Newton)
Soient a, b deux nombres réels et n un entier. Alors on a

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^0$$

Point Méthode :

1. Développons $(x+3)^5$

   $$(x+3)^5 = 1 \times x^0 \times 3^5 + 5 \times x^1 \times 3^4 + 10 \times x^2 \times 3^3 + 10 \times x^3 \times 3^2 + 5 \times x^4 \times 3^1 + 1 \times x^5 \times 3^0$$

2. Calculons $A = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \cdots + \binom{10}{10}$

   $$\begin{aligned} A &= \binom{10}{0} 1^0 1^{10} + \binom{10}{1} 1^1 1^9 + \binom{10}{2} 1^2 1^8 + \cdots + \binom{10}{10} 1^{10} 1^0 \\ &= (1+1)^{10} = 2^{10} \end{aligned}$$

   Le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à 10 éléments est 2^{10}, il est égal à l'addition des nombres de sous-ensembles à 0, 1, 2,... 10 éléments.

8.4 p-listes

Proposition 8.5 (p-listes)
Une p-liste de E est une liste ordonnée de p éléments de E.
Le nombre de p-listes d'un ensemble E à n éléments est n^p.

Situation caractéristique :
Nous sommes dans un cas où l'ordre dans lequel les éléments sont choisis intervient et où les répétitions sont autorisées.

Exemple : On lance 8 fois de suite un dé équilibré à 6 faces et on note après chaque lancer la face obtenue. **On choisit donc 8 fois de suite 1 face parmi 6.** Le nombre de résultats possibles est de 6^8.

8.5 Arrangement

Proposition 8.6 (Arrangement)
Soit E à n éléments. Le nombre de p-listes d'éléments distincts de E vaut

$$A_n^p = n(n-1)..(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Il est appelé arrangement de p éléments parmi n.

Situation caractéristique :
Nous sommes dans un cas où l'ordre dans lequel les éléments sont choisis intervient et où les répétitions ne sont pas autorisées.

Exemple : De combien de façon peut-on garer 6 voitures distinctes dans 10 places numérotées de 1 à 10.
La première voiture se présentant a 10 choix possibles. La seconde n'en a plus que 9...
Le nombre de possibilités est donc de $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = A_{10}^6$.
On range 6 voitures parmi 10 places : le nombre de possibilités est donc l'arrangement de 6 parmi 10.

8.6 Permutation

Proposition 8.7 (Permutation)
Soit E à n éléments. On appelle permutation de E une n-liste d'éléments distincts de E.
Il y a $n!$ permutations de E.

Situation caractéristique :
Nous sommes dans un cas où l'ordre dans lequel les éléments sont choisis intervient et où les répétitions ne sont pas autorisées.

Exemple : 8 enfants s'assoient sur un banc. Comptons le nombre de possibilités. On choisit un enfant parmi les 8 pour s'assoir tout à gauche puis un parmi les 7 restants pour s'assoir à droite du premier... Le nombre de possibilités est donc de $8 \times 7 \times \cdots 2 \times 1 = 8!$.
On place les 8 enfants : le nombre de possibiltés est égal au nombre de permutations de 8 enfants !

Fiche 12 - Dénombrement

Exercice 1
Simplifier les expressions suivantes, on précisera le bon quantificateur pour n :

$$\frac{7!}{6!} \quad \frac{13!}{11!} \quad \frac{(n+1)!}{n!} \quad \frac{(n+3)!}{n!}$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} \quad \frac{(n+1)!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-1)!}$$

$$\binom{7}{3} \quad \binom{30}{2} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3}$$

$$\binom{n+1}{3} \quad \binom{n+1}{n-1} \quad \binom{2n+1}{2}$$

Ecrire avec des factorielles les expressions suivantes :
$n(n+1)(n+2)$
$(n+1)(n+2)$
$(2n+1)(2n+2)\cdots(3n)$

Exercice 2
Résoudre les équations suivantes :
$\binom{n}{3} = n(2n-9)$
$\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \frac{5n^2-4n}{3}$
$7\binom{n}{2} = 2\binom{n+10}{2}$
$\binom{2n+1}{2n-2} = \binom{2n+1}{2n-4}$

Exercice 3
Développer les expressions suivantes :

$$(2+x)^4 \quad (3-2x)^3 \quad (2-x)^4$$

$$(1+x^2)^7 \quad (1002)^3 \quad (\sqrt{3}-1)^4$$

Préciser le terme de degré 4 dans $(2+5x)^6$.

Exercice 4

1. Combien peut-on écrire d'entiers naturels de 5 chiffres (un tel entier ne commence pas par 0) ?
2. Quelle est alors la probabilité d'obtenir une seule fois le chiffre 2 ? Au moins une fois le chiffre 2 ?

Exercice 5
En employant les lettres du mot "NOMBRE", combien peut-on écrire de "mots" de 4 lettres ?

Exercice 6
Un questionnaire comporte 8 questions auxquelles on répond par "oui" ou "non".

1. Quel est le nombre de bulletins réponses différents ?
2. Quel est la probabilité d'obtenir un bulletin réponse comportant exactement 1 "oui" ? Au moins 1 "oui" ? 6 "oui" ou plus ?

Exercice 7
Une urne contient 10 boules, 4 rouges et 6 blanches numérotées de 1 à 10.

1. On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? Un tirage bicolore ?
2. Mêmes questions si on tire 3 boules une à une sans remise.
3. Mêmes questions si on tire 3 boules une à une avec remise.

Exercice 8
On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :
$A=\{$les deux cartes tirées sont rouges$\}$
$B=\{$les deux cartes tirées sont un valet et un dix$\}$
$C=\{$les deux cartes tirées sont des personnages$\}$
$D=\{$ les deux cartes tirées sont des figures et ne sont pas toutes les deux rouges$\}$
$E=\{$on obtient au plus une figure$\}$
Calculer leurs probabilités.

Exercice 9

1. 10 personnes se retrouvent à une soirée, combien y a-t-il de poignées de mains différentes quand ils se saluent ?
2. Un touriste visite 5 villes A, B, C, D, E, combien y-at-il d'itinéraires possibles ?
3. De combien de façons peut-on ranger 6 livres différents sur 3 étagères (chaque étagère peut recevoir de 0 à 6 livres et le rangement sur une étagère n'a pas d'importance) ?

Programme de Colle 10

<u>Limites</u>

- Tableaux des opérations sur les limites.
- Théorèmes limites et inégalités, d'encadrement.
- Limites usuelles, croissances comparées, formes particulières en 0.
- Branches infinies.

<u>Dénombrement</u>

- Combinaison, formules, triangle de Pascal, binôme de Newton,
- p-listes, arrangement, permutation.

Exercices possibles
Exercices 1 à 9 semaine 9

Exercice 1
Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)!}+\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}=3n(n-1)$$

$$\begin{pmatrix} 4n-17 \\ 2n-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4n-17 \\ 2n-3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. Quel est le coefficient de x^4 dans le développement de $(2x+1)^8$.
2. Même question avec $(2x+3)^5$.

Exercice 4

1. Développer $(2-x)^4$.
2. Développer $(2+\frac{x}{2})^5$.

Exercice 5
Sans calculatrice, calculer 101^3 et $(\sqrt{2}+1)^5$

Exercice 6
Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 vertes et 2 rouges. On choisit au hasard et simultanément 2 chaussures.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 chaussures de la même couleur ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 pied gauche et 1 pied droit ?
3. Quelle est la probabilité de reconstituer 1 vraie paire de chaussures ?

Exercice 7
On effectue 5 tirages successifs avec remise dans une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9

1. Quelle est la probabilité d'obtenir aux deux premiers tirages la boule 2 ?
2. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules multiples de 3 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir des nombres supérieurs à 5 sachant qu'on a obtenu que des boules paires ?

Exercice 8

1. De combien de façon différentes peut-on garer 6 voitures dans 10 places numérotées de 1 à 10 ?
2. En utilisant les lettres du mot **NATURE**, on écrit un mot (ayant un sens ou non) de 4 lettres. Combien de mots différents peut-on écrire ?
3. 8 enfants s'assoient côte à côte sur un banc. Combien y a-t-il de possibilités ?