

Chapitre 7

Limites

7.1 Définitions

Dans cette section, x_0 désigne un réel et f désigne une fonction définie sur un voisinage I de x_0 .

7.1.1 Limite finie en x_0

Définition 7.1 (Limite finie en x_0)

Soit l un nombre réel. Dire que f possède l pour limite en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l dès que x est suffisamment proche de x_0 .

Remarque : On peut traduire ceci mathématiquement par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } (\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \alpha) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Le nombre l s'appelle la limite de f en x_0 .

On note alors $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ou $\lim_{x_0} f = l$ voire encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$.

Exemple :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 1$ et $x_0 = 1$. Alors quand x se rapproche de 1, $f(x)$ se rapproche de $f(1) = 3$. Nous allons le prouver avec la définition. Pour cela nous allons évaluer l'expression $|f(x) - 3|$

$$|f(x) - 3| = |4x - 1 - 3| = |4x - 4| = 4|x - 1|$$

donc $|f(x) - 3| < \varepsilon$ dès que $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4}$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3$

2. Par contre, il ne faut pas penser qu'en général $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Un exemple simple nous est fourni par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On constate que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \neq f(0)$

7.1.2 Limite infinie en x_0

Définition 7.2 (Limite infinie en x_0)

1. Dire que f possède $+\infty$ pour limite en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0 .

2. Dire que f possède $-\infty$ pour limite en x_0 signifie que $f(x)$ est aussi petit que l'on veut dès que x est suffisamment proche de x_0 .

Remarque : On peut traduire ceci mathématiquement par

1. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$ et $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$
2. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I$ et $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq A$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$ voire encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$

7.1.3 Limite à gauche et à droite en x_0

Définition 7.3 (Limite à gauche en x_0)

Mêmes définitions mais en remplaçant " x est suffisamment proche de x_0 " par " x est suffisamment proche de x_0 et $x < x_0$."

Définition 7.4 (Limite à droite en x_0)

Mêmes définitions mais en remplaçant " x est suffisamment proche de x_0 " par " x est suffisamment proche de x_0 et $x > x_0$."

7.1.4 limite en $\pm\infty$

Définition 7.5 (Limite en $+\infty$)

Mêmes définitions mais en remplaçant " x est suffisamment proche de x_0 " par " x est suffisamment grand."

Définition 7.6 (Limite en $-\infty$)

Mêmes définitions mais en remplaçant " x est suffisamment proche de x_0 " par " x est suffisamment petit."

7.2 Opérations sur les limites et limites particulières

Remarque : Dans ce paragraphe x_0 représentera un réel ou $\pm\infty$.

7.2.1 Comparaisons

Théorème 7.1

Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 et possédant une limite en x_0 .

1. Si $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, f(x) \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$.
2. Si $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, f(x) \geq g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Théorème 7.2 (Théorème d'encadrement)

Soient f, g, h trois fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 .

Si

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

Alors h possède une limite en x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$



7.2.2 Tableaux

Nous allons énoncer les règles de calculs sur les limites (qui seront valables pour les limites en x_0 ou à gauche ou à droite en x_0) par des tableaux.

La notation F.I. signifie forme indéterminée ce qui signifie qu'aucun théorème ne nous permet de conclure en général. Nous verrons par la suite des méthodes pour lever cette indétermination.

Addition



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Produit



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$l \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$\pm\infty$	F.I.	$\pm\infty$

Remarque : Le choix entre $+\infty$ et $-\infty$ s'effectue en utilisant la règle des signes.

Quotient



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$l \neq 0$	0	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$l' \neq 0$	$0^\pm$	0	$\pm\infty$	l	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	F.I.	0	$\pm\infty$	F.I.

Remarque : Le choix entre $+\infty$ et $-\infty$ s'effectue en utilisant la règle des signes.

Proposition 7.1 (changement de variable)

Si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow y_0} g(X) = z_0$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = z_0$$



Point Méthode : Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1$,

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x^2)}$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$,

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x^2)} = +\infty$.

7.2.3 Limites particulières

Proposition 7.2

1. En $+\infty$,

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{R}^{*+}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{R}^{*+}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln(x)} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\ln(x)} = +\infty$$

2. En $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x x^\alpha = 0$$

3. En 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{Soit } \alpha \in \mathbb{R}^{*+}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^\alpha) \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\text{Soit } \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1$$

Remarque :

1. Formes indéterminées du type $+\infty - (+\infty)$

Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croît le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$

2. Formes indéterminées du type $\frac{\infty}{\infty}$

Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui croît le plus vite en valeur absolue vers $+\infty$ au numérateur et au dénominateur.

3. Formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$

Pour lever une telle indétermination, on factorise le terme qui décroît le plus vite en valeur absolue vers 0 au numérateur et au dénominateur.



Point Méthode : **Polynôme et quotient de polynômes en l'infini**

On lève l'indétermination en factorisant chaque polynôme par le terme de plus haut degré puis en simplifiant si nécessaire.



Point Méthode : **Quantité conjuguée**

Déterminons la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3}$$

$$\forall x \in [2; 4] - \{3\},$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} &= \frac{(\sqrt{1+x} - 2)(\sqrt{1+x} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{1 + x - 4}{(x - 3)(\sqrt{1+x} + 2)} \\ &= \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{1}{(\sqrt{1+x} + 2)} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{1+x+2})} = \frac{1}{4}$

Finalement

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \frac{1}{4}$$

Remarquons que la quantité conjuguée de $\sqrt{1+x} - 2$ est $\sqrt{1+x} + 2$.

7.3 Branches infinies

Soit I un intervalle, soit $x_0 \in I$.

Définition 7.7 (Asymptote verticale)

Soit f définie sur $I - \{x_0\}$ telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mp\infty$.

Alors la représentation graphique de f admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

Définition 7.8 (Asymptote horizontale)

Soit f définie au voisinage de ∞ telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$.

Alors la représentation graphique de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$.

Définition 7.9 (Branche infinie en $+\infty$, (idem en $-\infty$))

Soit f définie au voisinage de $+\infty$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \mp\infty$.

Alors plusieurs cas sont possibles :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \mp\infty$ alors la représentation graphique de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la représentation graphique de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ alors deux cas sont possibles :
 - Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \mp\infty$ alors la représentation graphique de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ alors la représentation graphique de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

Exemple : Etudions les branches infinies des R.G. des fonctions suivantes :

- $x \mapsto x^2$
 C admet en $-\infty$ et en $+\infty$ des branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées.
- $x \mapsto e^x$
 C admet en $-\infty$ pour asymptote horizontale l'axe des abscisses et en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- $x \mapsto \ln(x)$
 C admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées et en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
- $x \mapsto 2x + 3 + \frac{1}{x^2 + 1}$ C admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 3$.

Fiche 11 - Limites

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x^5)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \sqrt{x})$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1+x}{1-\sqrt{x}} \right)$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 (1 - \sqrt{x}))$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^3)$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x^3)$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 \sqrt{-x})$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x})$$

10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} (1 + \sqrt{x}) \right)$$

11.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2}$$

12.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{(\ln x)^4}$$

13.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x^4)}$$

14.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^3}$$

15.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

16.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$$

17.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$$

18.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$$

19.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp(3x^2)}{x^6}$$

20.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

21.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\exp(x^2) - 1}$$

22.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 \right)$$

23.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

24.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \exp(x^2) - e^{3x} + x^2]$$

25.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 \ln(x)}{(\ln x)^2 + \ln(x^2)}$$

26.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^x$$

Exercice 2

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+x \leq e^x \leq 1+xe^x$.

En déduire un encadrement de $\frac{e^x - 1}{x}$ et re-

trouver ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par

$$f(x) = e^x + \ln(x)$$

Dresser le tableau de variations de f et étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = 2x + \ln(x^2)$$

Dresser le tableau de variations de f et étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 5

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{7+x} - 3}{x-2} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2+1} - 2}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{6x-3} - 3}{4-x^2} \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 4} - x \right)$$

Programme de Colle 9

Variables aléatoires discrètes

- Fonction de répartition (Définition et propriétés)
- Loi de probabilité (définition, lien avec la fonction de répartition)
- Espérance (définition, linéarité)
- Variance (définition, Formule de Huygens, $aX + b$), écart-type

Limites

- Tableaux des opérations sur les limites.
- Théorèmes limites et inégalités, d'encadrement.
- Limites usuelles, croissances comparées, formes particulières en 0.
- Branches infinies.

Exercices possibles Exercices 1 à 5 semaine 8

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ dans chacun des cas suivants.

1. En $\pm\infty$,

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{3x^3 + x^2 + x - 5}$$

2. En $x_0 = 2$

$$f(x) = \frac{\sqrt{6x-3} - 3}{4 - x^2}$$

3. En $+\infty$,

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4} - 3x$$

4. En $\pm\infty$,

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{2x^3 - 3x^2 + 1}$$

5. En $+\infty$,

$$f(x) = \sqrt{x} - 2 \ln x + 1$$

6. En $+\infty$,

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - 2 \ln(x)$$

7. En $+\infty$,

$$f(x) = \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln(x) - 1}$$

8. En $x_0 = 0$

$$f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$

9. En $x_0 = 0$

$$f(x) = 2 \ln(x) + \frac{1}{x}$$

10. En $x_0 = 0$

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$$

Exercice 2

Deux urnes contiennent respectivement 4 boules rouges et 3 boules vertes, 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard une boule dans la première (sans l'y remettre), puis on procède au tirage d'une deuxième boule, dans la même urne si la première boule tirée est rouge, dans l'autre urne si la première boule tirée est verte.

On notera R_i : "La $i^{\text{ème}}$ tirée est rouge" et V_i : "La $i^{\text{ème}}$ tirée est verte".

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules vertes ?
2. Deux boules rouges ?

Exercice 3

On lance un dé ordinaire. Si on fait 1, on tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Si on fait 2 ou 3, on tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Si on fait 4, 5 ou 6, on tire (en trichant) un as.

On notera A : "Tirer un as", P : "Tirer dans le jeu de 32 cartes", G : "Tirer dans le jeu de 52 cartes" et T : "Tirer en trichant".

1. Quelle est la probabilité de tirer un as ?
2. Ayant tiré un as, quelle est la probabilité d'avoir triché ?