Chapitre 6

Variables aléatoires discrètes

6.1 Définition

Définition 6.1 (VAR finie)
Une variable aléatoire réelle discrète X (VAR) est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que

1. *pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \in I\} \subset \mathcal{A}$*
2. *$X(\Omega)$ comporte un nombre fini de valeurs.*

Notations : On notera l'événement $(X = x)$ pour $\{\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x\}$.
On notera l'événement $(a < X)$ pour $\{\omega \in \Omega$ tel que $a < X(\omega)\}$.
On notera l'événement $(X \leq b)$ pour $\{\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \leq b\}$.

Exemple : On lance une pièce 10 fois de suite et on note X la VAR égale au nombre de fois où pile a été obtenue.
$(X = 3)$ est l'événement "3 piles et 7 faces ont été obtenus".
$(X < 5)$ est l'événement "strictement moins de 5 piles ont été obtenus".
$((X \geq 3) \cap (X \leq 5)) = (3 \leq X \leq 5) = ((X = 3) \cup (X = 4) \cup (X = 5))$.

Proposition 6.1 (Opérations de VAR)
Soient X, Y deux VAR sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et λ un nombre réel.
Alors $X + Y$, λX, XY, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ sont des VAR sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exemple : On choisit 5 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes.
R est la VAR égale au nombre de rois, D de dames, V de valets et A d'as dans la main obtenue.
Comme un as vaut 5 points, un roi 4 points, une dame 3 points et un valet 1 point, posons P la VAR égale au nombre de points de la main.
On obtient $P = 5 \times A + 4 \times R + 3 \times D + 1 \times V$.

6.2 Loi et fonction de répartition d'une VAR

Définition 6.2 (Loi)
Soit X une var discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On appelle loi de probabilité de X (ou loi de X ou distribution de X) l'ensemble des couples composés des valeurs prises par X et de ses probabilités correspondantes.

Valeurs prises par X :
Pour bien démarrer, il faut cerner les valeurs prises par X autrement dit $X(\Omega)$ en s'appuyant sur l'énoncé de l'exercice et en justifiant par des phrases.
Puis pour toute valeur x de $X(\Omega)$, on écrit

- $(X = x)$ signifie que... (phrases)
- $(X = x)$ =... (décomposition en événements)
- $P(X = x)$ =... (calcul de la probabilité)

Exemple : Dans l'exemple précédent, le jeu de 32 cartes comporte 4 rois, nous pourrons donc avoir au plus 4 rois dans la main de 5 cartes et au minimum 0.
Donc les valeurs prises par R sont 0, 1, 2, 3 et 4 autement dit $R(\Omega) = [\![0;4]\!]$.

Théorème 6.1 (Formule des probabilités totales)
Pour un S.C.E. formé des événements $(X = x_k)$***, avec*** $x_k \in X(\Omega)$

$$P(B) = P(B \cap X = x_1) + \cdots + P(B \cap X = x_n) = P_{X=x_1}(B)P(X = x_1) + \cdots + P_{X=x_n}(B)P(X = x_n)$$

Définition 6.3 (Fonction de répartition)
Soit X une var discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique réelle F définie par

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto P(X \leqslant x) \end{cases}$$

Proposition 6.2 (Propriétés de la fonction de répartition)
Soient X une var discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et F sa fonction de répartition.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0;1]$
2. *La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.*
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, *avec $a < b$, on a* $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

Exemple : On lance une fois un dé à 6 faces et on note X la VAR égale à la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X.
2. Etablir sa fonction de répartition.
3. Tracer la représentation graphique de la fonction de répartition.

Proposition 6.3 (De la fonction de répartition d'une VAR discrète à sa loi)
Soit X une VAR discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = F(k) - F(k-1)$$

6.3 Espérance

Définition 6.4 (Espérance)
Soit X une var discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi $\{(x_k, p_k),\ k \in \{1; ..; n\}\}$.
On appelle espérance mathématique (ou moyenne) de X le nombre noté $E(X)$ défini par

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

Remarque : $E(X)$ est une moyenne des valeurs de X pondérée par les probabilités correspondantes.

Proposition 6.4 (linéarité de l'espérance)

1. *Soit X une VAR et a, b deux nombres réels alors on a*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

2. *Soient X, Y 2 VAR alors on a la formule*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Définition 6.5 (VAR centrée)

1. *Dire que X est centrée signifie que $E(X) = 0$*
2. *La variable $X - E(X)$ est appelée VAR centrée associée à X*

6.4 Moments d'une VAR discrète

Définition 6.6 (Moment d'ordre r)
Soit X une VAR discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit r un entier naturel.
On appelle moment d'ordre r de X le nombre :

$$m_r(X) = E\left(X^r\right)$$

Définition 6.7 (Variance)
Soit X une VAR discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle variance de X le nombre :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

(Moyenne quadratique des écarts à la moyenne)

Proposition 6.5 (Calcul de la variance)
Soient X une VAR discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. *Formule de Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.*
2. *Soient a et b deux nombres réels, on a $V(aX + b) = a^2V(X)$.*

Définition 6.8 (Ecart-Type)
Soit X une VAR discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle écart-type de X le nombre :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Définition 6.9 (VAR réduite)
Soit X une var discrète finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. *Dire que X est réduite signifie que $\sigma(X) = 1$*
2. *Si $\sigma(X) \neq 0$ alors la VAR $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée la VAR centrée réduite associée à X.*

Exemple : Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.
On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à obtenir la première boule blanche.
Soit B le nombre de tirages nécessaires.
Expliciter la loi de B, son espérance et sa variance.

La première boule blanche peut être obtenue au tirage n° 1,2,3,4 ou 5 mais pas au tirage 6 car cela impliquerait que les 5 boules précédentes sont noires, ce qui n'est pas possible donc $B(\Omega) = [\![1, 5]\!]$.

Pour calculer les probabilités correspondantes, on introduit les évènements B_i : " piocher une boule blanche au i-ième tirage "

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B=1) &= \mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{6}, \quad \mathbb{P}(B=2) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \\
\mathbb{P}(B=3) &= \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(B_3) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5} \\
\mathbb{P}(B=4) &= \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(\overline{B_3})\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}}(B_4) \\
&= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15} \\
\mathbb{P}(B=5) &= \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap B_5) \\
&= \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}}(\overline{B_3})\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}}(\overline{B_4})\mathbb{P}_{\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}}(B_5) \\
&= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(B) &= 1 \times \frac{2}{6} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{2}{15} + 5 \times \frac{1}{15} = \frac{7}{3} \\
E(B^2) &= 1^2 \times \frac{2}{6} + 2^2 \times \frac{4}{15} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{2}{15} + 5^2 \times \frac{1}{15} = 7 \\
V(B) &= E(B^2) - [E(B)]^2 = \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

Fiche 10 - Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

On considère le jeu suivant : le joueur paie 3 euros pour jouer. Ensuite, il lance trois pièces équilibrées. Pour chaque "Pile" qu'il obtient, il gagne 2 euros

On désigne par X le nombre de "Pile" obtenus et par Y le gain (algébrique) du joueur.

1. Quelles sont les valeurs de X ?
2. Exprimer Y en fonction de X.
3. Quelles sont les valeurs de Y ?
4. Déterminer la loi de X.
5. Déterminer la loi de Y.
6. Déterminer les fonctions de répartitions de X et de Y.

Exercice 2

On dispose de deux dés :

- un dé cubique D_1 comporte 1 face marquée 0, 3 faces marquées 2, 2 faces marquées 1.
- un dé D_2 comportant 3 faces marquées 0, 2 faces marquées 1, 1 face marquée 2.

1. On lance le dé D_1 et on note X_1 le nombre obtenu. Déterminer la loi de X_1 et sa fonction de répartition.
2. Mêmes questions pour X_2 le nombre obtenu en lançant le dé D_2.
3. On lance D_1 et D_2 simultanément, déterminer la loi de $Z = X_1 + X_2$ et de $R = X_1 X_2$.

Exercice 3

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 2 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'a ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la var "nombre de tirage effectués".

Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 4

On lance n fois consécutives une pièce. La probabilité d'obtenir "pile" est p et celle d'obtenir "face" est $q = 1 - p$.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

1. Donner la loi de X_2.
2. Donner la loi de X_3.
3. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.

Exercice 5

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées $3, 4, 5$ et 6.

On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : $1, 3, 2, 3, 5$.
   Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi de X_2.
4. Quelles sont les valeurs possibles de X_n ?
5. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on a

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{6} P(X_n = 1)$$

$$P(X_{n+1} = 6) = \frac{1}{6} P(X_n = 5)$$

$\forall k \in \{1, .., 5\}$, $P(X_{n+1} = k)$

$$= \frac{7-k}{6} P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6} P(X_n = k+1)$$

Programme de Colle 8

Principe de récurrence

Variables aléatoires discrètes

- Fonction de répartition (Définition et propriétés)
- Loi de probabilité (définition, lien avec la fonction de répartition)
- Espérance (définition, linéarité)
- Variance (définition, Formule de Huygens, $aX + b$), écart-type

Exercices possibles Exercices 1 à 5 semaine 7

Exercice 1
Une urne contient 2 blanches et 8 noires. On tire successivement 2 boules. Soit B le nombre de blanches et N le nombre de noires obtenues.

1. On suppose que les tirages sont sans remise.
   (a) Déterminer la loi de B puis calculer $E(B)$.
   (b) Trouver une relation liant B et N.
   (c) En déduire la loi de N et son espérance.
2. Refaire la question précédente lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 2
Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement 2 boules. Le tirage se fait avec remise. On considère les variables aléatoires suivantes :

- P la VAR égale au numéro de la première boule tirée.
- D la VAR égale au numéro de la seconde boule tirée.

1. Donner les lois respectives de P et D sachant que :
2. Soit X_1 la VAR égale au plus petit numéro tiré. Autrement dit
$$X_1 = min(P, D)$$
Calculer $P(X_1 = 5)$. Etablir la loi de X_1. Calculer $E(X_1)$.
3. Soit X_2 la VAR égale au plus grand numéro tiré. Autrement dit
$$X_1 = max(P, D)$$
Calculer $P(X_2 = 5)$. Etablir la loi de X_2. Calculer $E(X_2)$.

Exercice 3
On dispose d'un paquet de 6 cartes. Ces cartes sont numérotées de 1 à 6.
Un joueur A propose à un joueur B le jeu suivant, moyennant une mise de 1 euro que lui verse B à chaque partie : B tire une carte au hasard, montre le nombre β qu'elle porte et remet la carte dans le paquet. Puis A tire une carte au hasard ; quand celle-ci porte le nombre α :

- Si $\alpha < \beta$, alors A donne à B la somme $(\beta - \alpha)$ euros : B a donc gagné $(\beta - \alpha - 1)$ euros.
- Si $\alpha > \beta$, alors B donne à A la somme de 1 euro : B a donc perdu 2 euros.
- Si $\alpha = \beta$, alors B a simplement perdu 1 euro, le montant de la mise.

1. Dresser le tableau à double entrée donnant les gains (positifs ou négatifs) de B suivant les différentes valeurs du couple (α, β).
2. Soit X la V.A. représentant les gains de B. Donner la loi de X.
3. Calculer $E(X)$. Le jeu avantage-t-il l'un des joueurs ?
4. Calculer la variance de X.