Chapitre 2

Introduction aux fonctions numériques d'une variable réelle

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Fonction)
Dire qu'une fonction f est une fonction numérique d'une variable réelle signifie qu'il existe un ensemble E (qui n'est pas nécessairement un intervalle) de $\mathbb{R}$ tel que chaque nombre $x \in E$ possède une seule image $f(x)$ qui soit un nombre réel.

Définition 2.2 (Ensemble de définition)
Les nombres réels qui possèdent une image par f constituent l'ensemble de définition de f. Il est noté traditionnellement $\mathcal{D}_f$.

Définition 2.3 (Antécédent)
Dire que a est un antécédent de b par f signifie que b est l'image de a par f.
Les nombres réels qui possède au moins un antécédent par f constituent l'ensemble image de f.

Point Méthode : Antécédents
Pour déterminer le ou les antécédents de y par f, résolvons dans D_f l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x.

Définition 2.4 (Représentation graphique)
L'ensemble des points (du plan cartésien) de coordonnées $(x, f(x))$, où x est un élément de $\mathcal{D}_f$, est la courbe représentative de f.

Définition 2.5 (Restriction)
Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenue dans $\mathcal{D}_f$.
On appelle restriction de f à A la fonction $f_{|A}$ dont le domaine de définition est A et qui est définie par $\forall x \in A,\ f_{|_A}(x) = f(x)$.

Remarque : Considérons la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ défnie sur $\mathbb{R}$.
Sa restriction à $\mathbb{R}^+$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto x$ et sa restriction à $\mathbb{R}^-$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^-$ par $x \mapsto -x$.

Point Méthode : Ensemble de définition d'une fonction
Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f : x \mapsto \sqrt{x-3} + \frac{1}{x-5}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathcal{D}_f \text{ si et seulement si } x-3 \geq 0 \text{ et } x-5 \neq 0$$

1. Résolvons $x-3 \geq 0$...
   L'ensemble des solutions de cette inéquation est $[3; +\infty[$.
2. Résolvons $x-5 = 0$...
   L'ensemble des solutions de cette équation est $\{5\}$.

Finalement $\mathcal{D}_f = [3; 5[\cup]5; +\infty[$

Déterminons l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de $f : x \mapsto \ln(x^2-4)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x \in \mathcal{D}_f \text{ si et seulement si } x^2-4 > 0$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.
Finalement $\mathcal{D}_f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.
On remarquera que l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas nécessairement un intervalle.

2.2 Sens de variation

Définition 2.6 (Monotonie)
Soit I un intervalle sur lequel f est définie ; dire que

1. *f est croissante (resp. décroissante) sur I signifie que*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \begin{cases} x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \\ \text{resp. } x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2). \end{cases}$$

2. *f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I signifie que*

$$\forall x_1, x_2 \in I, \begin{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ \text{resp. } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \end{cases}$$

3. *Dire qu'une fonction est monotone sur un intervalle signifie qu'elle est croissante (ou décroissante) sur cet intervalle.*

Point Méthode : Nous avons vu dans le chapitre précédent la gestion des inégalités. La monotonie permet d'aller plus loin.
Lorsque nous déciderons d'appliquer aux deux membres d'une inégalité une fonction, nous commencerons par nous assurer que les deux membres appartiennent à un même intervalle où cette fonction est monotone.

Retenons la rédaction imposée, grâce à ce premier exemple :

Résolution de $\sqrt{x-4} < 5$

1. Ensemble de définition.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité $\sqrt{x-4} < 5$ a un sens ssi $x-4 \geq 0$ autrement dit si $x \geq 4$.

2. Résolvons dans $[4; +\infty[$, l'inéquation $\sqrt{x-4} < 5$

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{x-4} & < & 5 \\
 & & \text{Or } \sqrt{x-4} \geq 0 \text{ et } 5 > 0 \\
 & & \text{Et la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } R_+ \\
\left(\sqrt{x-4}\right)^2 & < & 5^2 \\
x-4 & < & 25 \\
x & < & 29
\end{array}$$

Or les solutions appartiennent à $[4; +\infty[$.

3. Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x-4} < 5$ est $[4; 29]$.

Précisons la démarche, grâce à ce second exemple :

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\sqrt{x+2} > x$.

1. Ensemble de définition.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité a un sens ssi $x + 2 \geq 0$ autrement dit $x \geq -2$.

2. Résolvons dans $[-2; +\infty[$, l'inéquation $\sqrt{x+2} > x$
   (a) Premier cas : supposons $x \geq 0$

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{x+2} & > & x \\
 & & \text{Or } \sqrt{x+2} \geq 0 \text{ et } x \geq 0 \\
 & & \text{Et la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } R_+ \\
\left(\sqrt{x+2}\right)^2 & > & x^2 \\
x+2 & > & x^2 \\
-x^2+x+2 & > & 0 \cdots \\
x & \in &]-1; 2[\\
 & & \text{Or } x \geq 0 \\
x & \in & [0; 2[
\end{array}$$

   (b) Second cas : supposons $-2 \leq x < 0$

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{x+2} & > & x \\
 & & \text{Or } \sqrt{x+2} \geq 0 \text{ et } x < 0
\end{array}$$

   Donc $\forall x \in [-2; 0[$, $\sqrt{x+2} > x$.

3. Finalement l'ensemble des solutions de $\sqrt{x+2} > x$ est $[-2; 2[$.

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $e^{3x} > 2$.

$$\begin{array}{rcl}
e^{3x} & > & 2 \\
 & & \text{Or } e^{3x} > 0 \text{ et } 2 > 0 \\
 & & \text{Et la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ est strictement croissante sur } R_+^* \\
3x & > & \ln(2)
\end{array}$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x^2 > 9$.

$$\begin{array}{rcl} x^2 & > & 9 \\ & & \text{Or } x^2 > 0 \text{ et } 9 > 0 \\ & & \text{Et la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } R^+ \\ |x| & > & 3 \end{array}$$

Proposition 2.1

1. *La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).*
2. *Si f est croissante (resp. décroissante) sur I et g est croissante (resp. décroissante) sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est croissante sur I.*
3. *Si f est croissante sur I et g est décroissante sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I. De même, si f est décroissante sur I et g est croissante sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est décroissante sur I*

Exemple : $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^-$. En effet, elle est la composée de la fonction $f(x) = x^2 + 1$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ avec $f(\mathbb{R}^-) = [1, +\infty[$ et de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est décroissante sur $[1, +\infty[$.

Remarque : L'utilisation des variations d'une fonction permet de passer d'une inégalité sur deux nombres à une inégalité sur leurs images.
Elle permet aussi de passer d'une inégalité sur deux nombres à une inégalité sur leurs antécédents.

Proposition 2.2 (Monotonie et antécédents)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient x_1 et x_2 deux nombres de I tels que $f(x_1) < f(x_2)$.

- *Si f est croissante sur I alors $x_1 < x_2$.*
- *Si f est décroissantesur I alors $x_1 > x_2$.*

Soient x_1 et x_2 deux nombres de I tels que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

- *Si f est strictement croissante sur I alors $x_1 \leq x_2$.*
- *Si f est strictement décroissante sur I alors $x_1 \geq x_2$.*

Preuve :
Démonstration par l'absurde Soit f une fonction définie et croissante sur un intervalle I.
Soient x_1 et x_2 deux nombres de I tels que $f(x_1) < f(x_2)$.
Supposons que $x_1 \geq x_2$.
Dés lors, par définition d'une fonction croissante, on obtient que $f(x_1) \geq f(x_2)$ ce qui contredit la donnée $f(x_1) < f(x_2)$.
La supposition est donc fausse et on en conclut que $x_1 < x_2$. ■

2.3 Eléments remarquables

Définition 2.7 (Majorant, Minorant)
Soit f une fonction définie sur I.
Dire qu'un nombre réel M (resp. m) majore (resp. minore) la fonction f sur I signifie que

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant M \quad (\text{resp. } \forall x \in I,\ f(x) \geqslant m)$$

Dans ce cas on dit que M (resp. m) est un majorant (minorant) de f sur I.

Définition 2.8 (Extremum)
Soit f une fonction définie sur I.
Soit x_0 un élément de I.
Dire que f admet un maximum (resp. minimum) en x_0 signifie que

$$\forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0))$$

On note $\underset{I}{max} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\min_I f(x) = f(x_0)$).
Un extremum de f sur I est soit un minimum soit un maximum.

Définition 2.9 (Fonction Bornée)
Dire que f est bornée sur I signifie qu'elle est à la fois majorée et minorée sur I.

Exemple : Un tableau de variation montre que la fonction $f(x) = 3x$ est bornée sur $]-2,4]$ et que

$$\forall x \in]-2,4],\ f(x) \leqslant 12 \text{ et } \forall x \in]-2,4],\ f(x) \geqslant -6,$$

ce que l'on peut résumer par

$$\forall x \in]-2,4],\ \ -6 \leqslant f(x) \leqslant 12$$

La fonction f possède un maximum sur $]-2,4]$ en $x_0 = 4$ et $\underset{]-2,4]}{max} f(x) = 12$. Par contre, elle ne possède pas de minimum (le seul possible serait en -2 qui n'est pas dans l'intervalle $]-2,4]$, bien que l'on constate qu'elle possède un plus petit minorant (qui est -6) ce qui amène à introduire la définition suivante.

Définition 2.10 (Borne supérieure, inférieure)
Si f est une fonction majorée (resp. minorée) sur I, on appelle borne supérieure (resp. inférieure) le plus petit des majorants de f (resp. le plus grand des minorant de f) sur I. On la note $\sup_I f$ (resp. $\inf_I f$).

Exemple : Soit $f : x \mapsto 4 + \frac{1}{x^2}, \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Le tableau de variation de f permet d'obtenir que f n'a pas de maximum ni de borne supérieure ($\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$), de plus elle n'a pas de minimum ($\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) > 4$) mais possède une borne inférieure 4 ($\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$).

Point Méthode : Encadrement d'une fonction sur un intervalle

- Méthode terme à terme.
  Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}^-$, on a $2x \leq 2(e^x + x) \leq 2x + 2$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^-, \qquad 0 &\leq e^x \leq 1 \\ x &\leq e^x + x \leq x + 1 \\ 2x &\leq 2(e^x + x) \leq 2x + 2 \end{aligned}$$

- A l'aide d'une étude de signe.
- A l'aide d'une étude de fonctions.
  Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(x) \leq x - 1$.
  Pour cela on étudiera la fonction $x \mapsto x - 1 - \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ afin d'obtenir dans un premier temps son sens de variation puis d'obtenir que 0 est un minorant de cette fonction.
  On pourra alors conclure que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x - 1 - \ln(x) \geq 0$ autrement dit que $ln(x) \leq x - 1$.

2.4 Propriétés remarquables

Définition 2.11 (Parité)
Dire que f est paire (resp. impaire) signifie que

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall x \in \mathcal{D}_f, \ -x \in \mathcal{D}_f \\ \text{et } \forall x \in \mathcal{D}_f, \ f(-x) = f(x) \ (\text{resp.} f(-x) = -f(x)) \end{array} \right.$$

Exemple :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est une fonction paire car d'une part $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, donc si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et d'autre part, on a
$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$$
2. Par contre la fonction définie par $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ n'est pas une fonction paire ou impaire car $\mathcal{D}_f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ *donc* $-2 \in \mathcal{D}_f$ mais $2 \notin \mathcal{D}_f$.

Proposition 2.3 (Symétries et parité)
La représentation graphique d'une fonction paire (resp. impaire) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp. par rapport à l'origine du repère).

Proposition 2.4 (Symétries : cas général)
Soit f une fonction définie sur I et C sa représentation graphique.

1. *Axe de symétrie*
   C admet pour axe de symétrie la droite (D) d'équation $x = a$ si et seulement si $\forall x \in I$, on a $2a - x \in I$ et $f(2a - x) = f(x)$
2. *Centre de symétrie*
   C admet pour centre de symétrie le point J de coordonnées (a, b) si et seulement si $\forall x \in I$, on a $2a - x \in I$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

Exemple : Soit $f : x \mapsto (4 - x)^3 + 2, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrons que la représentation graphique (C) de f admet pour centre de symétrie le point J de coordonnées $(4; 2)$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2 \times 4 - x) + f(x) = (4 - (8 - x))^3 + 2 + (4 - x)^3 + 2 = (-4 + x)^3 + 4 + (4 - x)^3 = -(4 - x)^3 + 4 + (4 - x)^3 = 4 = 2 \times 2$.
Finalement (C) admet pour centre de symétrie le point J de coordonnées $(4; 2)$.

Proposition 2.5 (Position relative d'une courbe et d'une droite)
Soit f une fonction, (C) sa représentation graphique et (d) une droite d'équation $y = ax + b$ avec a et b des réels.

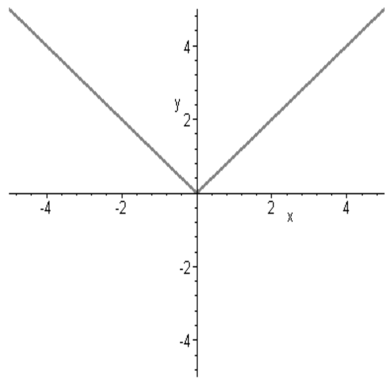
- *(C) est au-dessus de (d) pour les plages d'abscisses vérifiant $f(x) > ax + b$.*
- *(C) est en-dessous de (d) pour les plages d'abscisses vérifiant $f(x) < ax + b$.*
- *(C) coupe (d) aux points d'abscisses vérifiant $f(x) = ax + b$.*

Remarque : Pour étudier la position relative de (C) et (d), il faut donc étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$.

2.5 Applications aux fonctions usuelles.

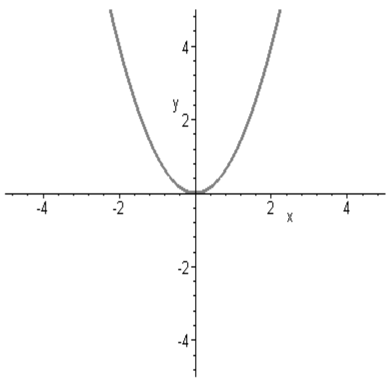
2.5.1 Valeur absolue

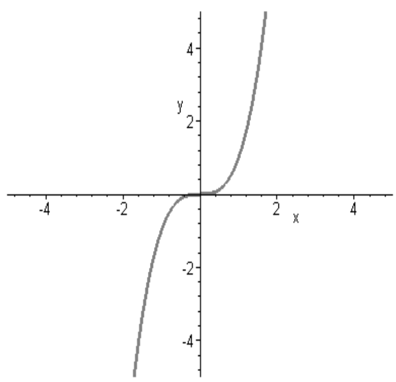
La fonction valeur absolue a pour domaine de définition $\mathbb{R}$ et voici la représentation graphique. C'est une fonction paire, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.



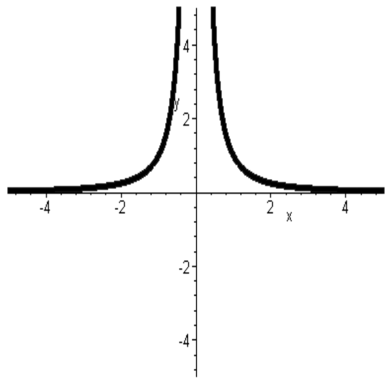
2.5.2 Fonction puissances entières $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$

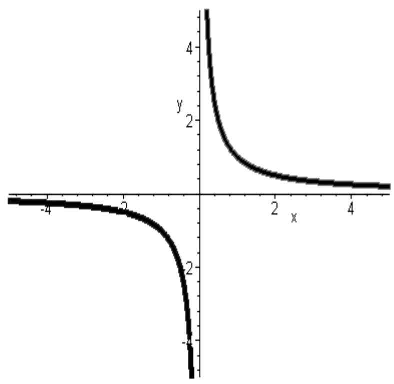
Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$, est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair) dont voici la représentation graphique (à gauche, n pair et à droite, n impair).





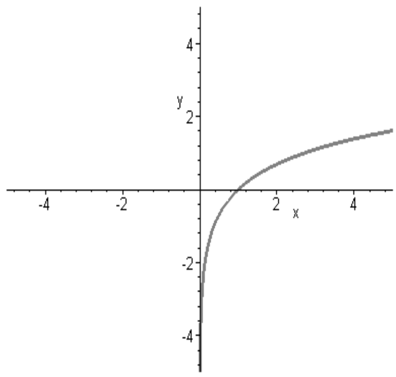
Soit n un entier strictement négatif, la fonction $x \mapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^\times$, est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair) dont voici la représentation graphique (à gauche, n pair et à droite, n impair).

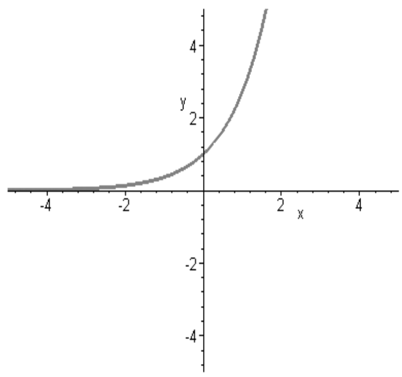




2.5.3 fonction logarithme népérien et exponentielle

La fonction ln est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^\times$, la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et voici leurs représentations graphiques





2.6 Polynômes

Définition 2.12 (Polynôme)
Un polynôme est une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ *et de la forme*

$$x \mapsto P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

où $a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \{0, .., n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Les nombres a_k *sont les coefficients du polynôme.*

Définition 2.13 (Degré d'un polynôme)
Si $a_n \neq 0$, *le polynôme* $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ *est de degré* n *et on note* $\deg P = n$. *Dans ce cas,* a_n *est son coefficient dominant.*

Polynôme nul : Si tous les coefficients sont nuls, on dit que P est le polynôme nul. Le polynôme nul ne possède pas de degré.

Identification : Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et leurs coefficient sont égaux 2 à 2 (identification).

Notation : On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple :

1. Le polynôme $x \mapsto 7x^3 - 3x^2 + 10$ est de degré 3 et son coefficient dominant est 7.
2. Si $ax^2 + bx + c = 3x + 2 = 0x^2 + 3x + 2$ alors $a = 0$, $b = 3$ et $c = 2$

Proposition 2.6 (Degré d'un polynôme)

1. *Le degré d'un polynôme constant non-nul est* 0.
2. $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$
3. $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

Définition 2.14 (Zéros d'un polynôme)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
Dire que a est un zéro de P signifie que $P(a) = 0$.

Théorème 2.1 (Zéros et factorisation)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
Le nombre a est un zéro de P si et seulement si P se factorise par $(x - a)$ autrement dit si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x - a)Q(x) \text{ et } deg(Q) = deg(P) - 1$$

.

Factorisation d'un polynôme :
On pose, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$,
On constate que 1 est racine évidente de P.

$$P(1) = 0$$

Donc $(x - 1)$ divise P.
On remarque que -1 est une autre racine évidente de P.
Donc P se factorise par $(x + 1)$.
Finalement il existe un polynôme Q de degré 3 tel que

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)Q(x)$$

Par une **identification**, on obtient

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$$

On constate que 1 est racine évidente de Q donc $(x - 1)$ divise Q.

$$Q(x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$$

L'étude du trinôme du second degré $x^2 - 3x + 2$ nous donne la factorisation

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Finalement, on obtient $P(x) = (x - 1)^3(x + 1)(x - 2)$.

Schéma de Hörner : Soit $Q : x \mapsto x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Q admet pour racine évidente 2. Le tableau suivant permet de trouver la factorisation :

	1	-4	5	-2
2	0	2	-4	2
	1	-2	1	0

On obtient $Q(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 1)$.

Fiche 3 - Introduction aux Fonctions

Exercice 1 (Ensemble de définition)
Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies par :

1. $$d(x) = x^2 + 4x + 1$$
2. $$e(x) = e^{3x} + 6$$
3. $$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$$
4. $$g(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 12}$$
5. $$h(x) = \frac{1}{|x| - 1}$$
6. $$i(x) = \sqrt{|x| - 2}$$
7. $$j(x) = \ln\left((x-1)(2x^2 - x - 1)x^2\right)$$
8. $$k(x) = \ln(3 + x) - \ln(4 - 2x) - \ln 3$$
9. $$l(x) = ln\,(e^x + 1)$$
10. $$m(x) = \frac{e^{3x} - 2}{e^{\frac{x}{2}} - 4}$$
11. $$n(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$$
12. $$p(x) = \frac{2x+3}{e^{4x} + 5}$$
13. $$q(x) = \sqrt{-x^2 + x - 1}$$
14. $$r(x) = \frac{ln(x^2 - 4x + 3)}{e^x - e^{-2}}$$
15. $$s(x) = (1 - x)^{2+x}$$
16. $$t(x) = (3 + x)^{\sqrt{3}}$$

Exercice 2 (Résolution d'inéquations)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $$3e^x + 4 > 6$$
2. $$-3(x - 2) > 10$$
3. $$\frac{3}{4} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3} < 0$$
4. $$\ln(x + 2) \leq 3$$
5. $$\ln(x^2 + x + \frac{1}{2}) > 0$$
6. $$\sqrt{x - 2} > 4$$
7. $$x^2 \geq 25$$
8. $$x^2 \leq 16$$
9. $$\sqrt{x^2 - 1} \leq 10$$

Exercice 3 (Ensemble image)
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

Déterminer l'ensemble image par f des intervalles suivants :

1. $I =]0; 1]$
2. $I =]0; 2[$
3. $[-1; 1[$

Exercice 4 (Extrema d'une fonction)
Les fonctions suivantes sont-elles bornées sur I ? Y ont-elles un maximum ou un minimum ?

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ sur :
   (a) $I = [1; 2]$
   (b) $I =]0; 1]$
   (c) $I =]0; 2[$
   (d) $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ sur :
   (a) $I = [0; \frac{1}{2}[$
   (b) $I = [-1; 0]$
   (c) $I = [-1; \frac{1}{2}[$
   (d) $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$

Programme de Colle 2

<u>Calcul algébrique</u>
- Ensembles de nombres
- Identités remarquables
- Puissances entières (définition et formules de calcul)
- Logarithme népérien (formules de calcul)
- Exponentielle (formules de calcul)
- Puissances réelles (définition et formules de calcul)
- Valeurs absolues (définition et formules de calcul)
- Règles de calcul sur les inégalités, inéquations du premier et second degré

<u>Introduction aux fonctions numériques d'une variable réelle</u>
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Définition de fonctions croissantes, décroissantes sur un intervalle.
- Application à la résolution d'inéquations.

Exercices possibles Exercices 1 à 4 semaine 1

Exercice 1
Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies par :

$$e(x) = \frac{x+1}{x^2(x-1)-4(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{2}{x^3-5x^2+-x}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2-4x-12}$$

$$h(x) = \sqrt{-2x^2+3x-1}$$

$$i(x) = \sqrt{x^3-2x^2+x}$$

$$j(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$k(x) = \sqrt{-x^3+5x^2-6x}$$

$$l(x) = \sqrt{x^2-4}$$

$$m(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$n(x) = \frac{1}{|x|-1}$$

$$p(x) = \sqrt{|x|-2}$$

$$q(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right)$$

$$r(x) = \ln\left(x^2-1\right)$$

$$s(x) = \ln\left(x^2\right)$$

$$t(x) = \ln\left(x^3+2x^2\right)$$

$$u(x) = \ln\left(x^4+3x^2\right)$$

Exercice 2
Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $$\sqrt{x-4} \leq 2$$
2. $$\sqrt{3x-2} \leq 4x-6$$
3. $$\sqrt{x^2+9} > 5$$
4. $$\sqrt{x^2-1} \geq x-2$$
5. $$\sqrt{x-2} \geq -x^2+3x-2$$
6. $$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 3x$$

Fiche 4 - Introduction aux Fonctions

Exercice 1 (Encadrement)
Démontrer par calcul que $\forall x \in]1;+\infty[$,

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Exercice 2 (Encadrement)
Démontrer par une étude de fonction que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 + x$$

Exercice 3 (Encadrement)

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$0 \leq x \leq x^2 + 1$$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq e^{-x} \leq 1$.
3. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$0 \leq \frac{xe^{-x}}{x^2+1} \leq 1$$

Exercice 4 (Encadrement)

1. Démontrer que $\forall x \in]1;+\infty[$, $x^2 \geq x^2 - 1 \geq (x-1)^2$.
2. En déduire que $\forall x \in]1;+\infty[$,
$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{x-1}$$

Exercice 5 (Encadrement)

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$(ln\,(x))^3 \leq (x-1)^3$$

Exercice 6 (Parité)
Donner l'ensemble de définition puis étudier la parité des fonctions suivantes.

$$f(x) = x + ln(1-x) - ln(x+1)$$
$$g(x) = x\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Exercice 7 (Symétries)
Démontrer que les représentations graphiques des fonctions suivantes admettent pour centre de symétrie le point J.

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1} \text{ et } J(-1;-4)$$
$$h : x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 2x + 3} \text{ et } J(1;0)$$
$$g : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 3 \text{ et } J(\frac{1}{2};\frac{5}{2})$$

Exercice 8 (Symétries)
Soit C la courbe d'équation $y = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$.
Démontrer que C admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Exercice 9 (Factorisation)
Factoriser les polynômes suivants :

- $P(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$
- $Q(x) = 6x^3 + 7x^2 - x - 2$
- $R(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$
- $S(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
- $T(x) = -x^3 + x^2 + 16x + 20$
- $U(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 4x$
- $V(x) = 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1$

Exercice 10 (Identification)
Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8$$

Démontrer que $P + 1$ est le carré d'un polynôme Q.
En déduire une factorisation de P.

Exercice 11 (Identification)
Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x + 7$$

Démontrer que $P - 8$ est le cube d'un polynôme Q
En déduire une factorisation de P.

Exercice 12 (Identification)
Déterminer un polynôme P de degré 3, se factorisant par $(x-2)^2$ et tel que $P(1) = 3$ et $P(-1) = -9$

Exercice 13 (Identification)
Quels sont les polynômes P de degré 4 tels que

$$\begin{cases} P \text{ soit une fonction paire} \\ \text{et } P(1) = 4 \text{ et } P(-2) = 31 \end{cases}$$

Programme de Colle 3

Introduction aux fonctions numériques d'une variable réelle

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Définition de fonctions croissantes, décroissantes sur un intervalle.
- Application à la résolution d'inéquations.
- Eléments remarquables d'une fonction (majorant, minorant, extrêmum, fonction bornée). Encadrer une fonction sur un intervalle.
- Fonctions paires et impaires, symétries de la représentation graphique d'une fonction.
- Polynômes (zéro et factorisation, identification, schéma de Hörner).

Exercices possibles Exercices 1 à 13 semaine 2

Exercice 1
Démontrer que $\forall x \in [2;+\infty[$,

$$\frac{4}{x^2} \leq \frac{8}{x^2+3} \leq \frac{8}{x^2}$$

Exercice 2

1. Méthode terme à terme
   (a) Démontrer que $\forall x \in [1;+\infty[$, $2x^3 \geq 1+x^3 \geq x^3$.
   (b) En déduire que $\forall x \in [1;+\infty[$, $\frac{1}{2x^2} \leq \frac{x}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^2}$.
2. Méthode par deux études de signe
   (a) Etudier le signe de $\frac{x}{1+x^3} - \frac{1}{2x^2}$ sur $[1;+\infty[$.
   (b) Etudier le signe de $\frac{1}{x^2} - \frac{x}{1+x^3}$ sur $[1;+\infty[$.
   (c) En déduire que $\forall x \in [1;+\infty[$, $\frac{1}{2x^2} \leq \frac{x}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^2}$.

Exercice 3
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis étudier leur parité.

$$g : x \mapsto \frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{x^2+2}$$

$$h : x \mapsto \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \quad l : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Exercice 4
Démontrer que les représentations graphiques des fonctions suivantes possèdent le point J pour centre de symétrie.

1. $J(0,1)$ et $f : x \mapsto \frac{x^2+x-1}{x^2-1}$
2. $J(0,1)$ et $h : x \mapsto \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$
3. $J(\frac{1}{2},0)$ et $k : x \mapsto \frac{1-2x}{x^2-x-2}$
4. $J(0,0)$ et $l : x \mapsto -x+\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

Exercice 5
Démontrer que les représentations graphiques des fonctions suivantes possèdent la droite (d) pour axe de symétrie .

1. $(d) : x = -\frac{1}{2}$ et
$$f : x \mapsto ln|x^2+x-2|$$
2. $(d) : x = -\frac{3}{2}$ et
$$f : x \mapsto \frac{4x^2+12x+\frac{35}{4}}{x^2+3x+2}$$
3. $(d) : x = \frac{1}{2}$ et
$$f : x \mapsto \frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}$$

Exercice 6
Factoriser les polynômes suivants :

1. $P(x) = -2x^3 - x^2 + 13x - 6$
2. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2$
3. $P(x) = 2x^3 - 16$
4. $P(x) = x^4 - x^3 - x + 1$

Exercice 7

1. Soit $P(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$. Démontrer que $P(x) + 9$ est le carré d'un polynôme Q. En déduire une factorisation de P.
2. Soit $P(x) = x^8+8x^6+22x^4+24x^2+9$. Démontrer que P est le carré d'un polynôme Q. Déduire une factorisation du polynôme P.