Colles de Mathématiques

Classe préparatoire économique, option économique, première année

Lycée Gambetta, Arras

• Mélissa Bailloeuil •

année scolaire 2010-2011

Consignes Colles de Maths

Cahier de colles

J'ai mis en place un système de cahier de colles. Chaque élève est pourvu d'un cahier de colle comportant en première page la grille où vous reporterez les notes de colles ainsi qu'une brève remarque s'il y a lieu d'en faire une. Cette grille récapitulant les notes permettra de suivre l'évolution de l'élève et de vérifier que toutes les colles ont bien été faites.

Ce cahier de colle que possède chaque élève possède une autre fonction.

- Au début du cahier, l'élève doit y résumer le cours effectué en classe, ce qui s'apparenterait aux fameuses "fiches-résumés". Ce cahier doit être à jour en fonction du programme de colle.
- A la fin du cahier, l'élève doit ajouter au fur et à mesure tout ce qui peut l'aider à progresser : erreurs à ne plus commettre, trucs, astuces...
- Toujours à la fin du cahier, on doit trouver un encart par DM et et par DS regroupant les erreurs à ne plus commettre ou des passages d'exercices que l'élève à juger intéressants pour lui.

Sanction contre la non tenue du cahier de colles

La tenue de ce cahier doit être exemplaire et je vous demanderai de bien vouloir le feuilleter brièvement afin de vous assurer qu'il est à jour et soigné. Si vous constatez que le travail n'a pas été fait, la note de colle obtenue ce jour-là sera divisée par deux, les élèves ont été prévenus.
N'hésitez surtout pas à appliquer cette sanction !

Déroulement de l'heure de colles

Vous pourrez commencer par une petite question de cours (une définition ou un théorème... proposés dans le programme de colle) puis ensuite poser comme à l'accoutumée des exercices d'un niveau simple à moyen.

Notation

N'hésitez pas à utliser toute la palette des notes de 01 à 20. Des hésitations sur le cours devraient nous inciter à mettre largement sous la moyenne.

Modifications de la progession

Attention, cette année la progression a été largement modifiée.

Cordialement, Mélissa

Programme de Colle 1

Calcul algébrique

- Ensembles de nombres
- Identités remarquables
- Puissances entières (définition et formules de calcul)
- Logarithme népérien (formules de calcul)
- Exponentielle (formules de calcul)
- Puissances réelles (définition et formules de calcul)
- Valeurs absolues (définition et formules de calcul)

Exercices possibles

Exercice 1 (Calculs)

- Développer

$$A = (2+x)^3 + (2-x)^3$$

- Factoriser

$$B = (x^2-4x+1)^2 - (6x^2-3x+1)^2$$

- Factoriser

$$C = (x+3)(2x^2-8) - (x^2+4x+4)(x-2)$$

Exercice 2 (Puissances)

- Simplifier

$$A = \frac{10^3+10^5+10^7}{10^4+10^6+10^8}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier

$$B = (-1)^{2n+2} - (-1)^{2n+3} + (-1)^{2n-1}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier

$$C = 2^{n+2} - 3 \times 2^n - 8 \times 2^{n-2} + \frac{1}{2}2^{n+1}$$

Exercice 3 (Valeur absolue)

Exprimer sans le symbole valeur absolue les expressions suivantes :

- $A = |\ln 3 - 2\ln 2|$
- $B = |\ln 5 + \ln 2 - 2\ln 3|$
- $C = |\ln e^{2x}|$
- $D = |x-1| + |x+1|$

Exercice 4 (Valeur absolue)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

- $|3x-5| = 4$
- $|x-3| + 2|x-1| = 0$
- $|3-2x| \geq 1$
- $|3-x| = x+1$

Exercice 5 (racine carrée)

Simplifier :

- $A = \sqrt{48} + \sqrt{147} - 2\sqrt{75}$
- $B = \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$
- $C = \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}$

Exercice 6 (racine carrée)

Résoudre les équations :

- $\sqrt{2x+1} = 3$
- $\sqrt{25-6x} = x-3$
- $\sqrt{3x-2} = 4$

Programme de Colle 2

Calcul algébrique

- Ensembles de nombres
- Identités remarquables
- Puissances entières (définition et formules de calcul)
- Logarithme népérien (formules de calcul)
- Exponentielle (formules de calcul)
- Puissances réelles (définition et formules de calcul)
- Valeurs absolues (définition et formules de calcul)
- Règles de calcul sur les inégalités, inéquations du premier et second degré

Introduction aux fonctions numériques d'une variable réelle

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Définition de fonctions croissantes, décroissantes sur un intervalle.
- Application à la résolution d'inéquations.

Exercices possibles
Exercices 1 à 6 semaine 1

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions définies par :

$$e(x) = \frac{x+1}{x^2(x-1) - 4(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{2}{x^3 - 5x^2 + -x}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 12}$$

$$h(x) = \sqrt{-2x^2 + 3x - 1}$$

$$i(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$j(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$k(x) = \sqrt{-x^3 + 5x^2 - 6x}$$

$$l(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$m(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

$$n(x) = \frac{1}{|x| - 1}$$

$$p(x) = \sqrt{|x| - 2}$$

$$q(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right)$$

$$r(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$$

$$s(x) = \ln\left(x^2\right)$$

$$t(x) = \ln\left(x^3 + 2x^2\right)$$

$$u(x) = \ln\left(x^4 + 3x^2\right)$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $$\sqrt{x-4} \leq 2$$
2. $$\sqrt{3x-2} \leq 4x - 6$$
3. $$\sqrt{x^2+9} > 5$$
4. $$\sqrt{x^2-1} \geq x - 2$$
5. $$\sqrt{x-2} \geq -x^2 + 3x - 2$$
6. $$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 3x$$

Programme de Colle 3

Introduction aux fonctions numériques d'une variable réelle

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Définition de fonctions croissantes, décroissantes sur un intervalle.
- Application à la résolution d'inéquations.
- Eléments remarquables d'une fonction (majorant, minorant, extrêmum, fonction bornée). Encadrer une fonction sur un intervalle.
- Fonctions paires et impaires, symétries de la représentation graphique d'une fonction.
- Polynômes (zéro et factorisation, identification, schéma de Hörner).

Exercices possibles
Exercices 1 à 2 semaine 2

Exercice 1
Démontrer que $\forall x \in [2;+\infty[$,

$$\frac{4}{x^2} \leq \frac{8}{x^2+3} \leq \frac{8}{x^2}$$

Exercice 2
1. Méthode terme à terme
   (a) Démontrer que $\forall x \in [1;+\infty[$, $2x^3 \geq 1+x^3 \geq x^3$.
   (b) En déduire que $\forall x \in [1;+\infty[$, $\frac{1}{2x^2} \leq \frac{x}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^2}$.
2. Méthode par deux études de signe
   (a) Etudier le signe de $\frac{x}{1+x^3} - \frac{1}{2x^2}$ sur $[1;+\infty[$.
   (b) Etudier le signe de $\frac{1}{x^2} - \frac{x}{1+x^3}$ sur $[1;+\infty[$.
   (c) En déduire que $\forall x \in [1;+\infty[$, $\frac{1}{2x^2} \leq \frac{x}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^2}$.

Exercice 3
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes puis étudier leur parité.

$$g : x \mapsto \frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{x^2+2} \qquad h : x \mapsto \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$l : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Exercice 4
Démontrer que les représentations graphiques des fonctions suivantes possèdent le point J pour centre de symétrie.

1. $I(0,1)$ et $f : x \mapsto \frac{x^2+x-1}{x^2-1}$
2. $I(0,1)$ et $h : x \mapsto \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}$
3. $I(\frac{1}{2},0)$ et $k : x \mapsto \frac{1-2x}{x^2-x-2}$
4. $I(0,0)$ et $l : x \mapsto -x+\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

Exercice 5
Démontrer que les représentations graphiques des fonctions suivantes possèdent la droite (d) pour axe de symétrie .

1. $(d) : x = -\frac{1}{2}$ et
$$f : x \mapsto ln|x^2+x-2|$$
2. $(d) : x = -\frac{3}{2}$ et
$$f : x \mapsto \frac{4x^2+12x+\frac{35}{4}}{x^2+3x+2}$$
3. $(d) : x = \frac{1}{2}$ et
$$f : x \mapsto \frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}$$

Exercice 6
Factoriser les polynômes suivants :

1. $P(x) = -2x^3 - x^2 + 13x - 6$
2. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2$
3. $P(x) = 2x^3 - 16$
4. $P(x) = x^4 - x^3 - x + 1$

Exercice 7
1. Soit $P(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$. Démontrer que $P(x) + 9$ est le carré d'un polynôme Q. En déduire une factorisation de P.
2. Soit $P(x) = x^8 + 8x^6 + 22x^4 + 24x^2 + 9$. Démontrer que P est le carré d'un polynôme Q. Déduire une factorisation du polynôme P.

Programme de Colle 4

Introduction aux fonctions numériques d'une variable réelle

- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- Résoudre une inéquation.
- Encadrer une fonction sur un intervalle.
- Fonctions paires et impaires, symétries de la représentation graphique d'une fonction.
- Polynômes (zéro et factorisation, identification, schéma de Hörner).

Suites numériques

- Définition, sens de variation
- Suites arithmétiques et géométriques (terme général, variation, sommes de termes consécutifs)

Exercices possibles
Exercices 1 à 7 semaine 3

Exercice 1
Etudier le sens de variation des suites suivantes définies $\forall n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{-n+1}{n+2}$$
$$v_n = \frac{-3n+4}{n+1}$$
$$r_n = \sqrt{2n+1}$$
$$t_n = ne^{-2n}$$

Exercice 2
Pour chacune des suits suivantes, expliciter le terme général en fonction de l'indice. (selon les cas, n, m, p, i, j, etc).

1. $\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad a_{k+1} = -2a_k$ avec $a_1 = 7$.
2. $\forall n \geqslant 2, \quad 2b_n = b_{n-1}$ avec $b_1 = 3$.
3. $\forall p \geqslant 0, \quad c_{p+1} - c_p = 3$ et $c_0 = 10$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad d_n = \dfrac{d_{n-1}}{3}$ avec $d_0 = 1$.
5. $\forall i \in \mathbb{N}, \quad e_{i+1} + 1 = e_i$ avec $e_5 = 10$.
6. $\forall j \in \mathbb{N}, \quad 3f_{j+1} - 2f_j = 0$ avec $f_0 = 1$.
7. $\forall r \in \mathbb{N}^\times, \quad 35k_{r+1} = k_r$ avec $k_5 = 7$.

Exercice 3
Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3$$

1. Montrer que
$$v_n = u_n + 2n - 1$$
est le terme général d'une suite géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n^2 - 4$$
est géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Programme de Colle 5

Suites numériques

- Définition, sens de variation
- Suites arithmétiques et géométriques (terme général, variation, sommes de termes consécutifs)
- Suites arithmético-géométriques (obtention du termme général)
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (obtention du terme général)

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 4

Exercice 1

Pour chacune des suits suivantes, expliciter le terme général en fonction de l'indice. (selon les cas, n, m, p, i, j, etc).

1. $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad d_n = \dfrac{d_{n-1}}{3} + 4$ avec $d_0 = 1$.
2. $\forall i \in \mathbb{N}, \quad 4e_{i+1} + 1 = e_i$ avec $e_0 = 0$.
3. $\forall j \in \mathbb{N}, \quad 3f_{j+1} - 2f_j = 1$ avec $f_0 = 1$.
4. $\forall m \in \mathbb{N}^{\times}, \quad al_{m+1} = bl_m$ avec $l_1 = 2$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2h_{n+2} + h_{n+1} - h_n = 0$ avec $h_0 = h_1 = 1$.
6. $\forall r \in \mathbb{N}^{\times}, \quad 35k_{r+1} = 3k_r + 2k_{r-1}$ avec $k_0 = -3$ et $k_1 = 7$.
7. $\forall m \in \mathbb{N}^{\times}, \quad l_{m+1} = l_m + l_{m-1}$ avec $l_0 = 1$ et $l_1 = 2$.

Exercice 2

Soit $(u_p)_{p\geqslant 0}$ une suite satisfaisant à la relation

$$\forall p \geqslant 0, \quad u_{p+1} = 2u_p + 5^p$$

Pour expliciter le terme général de cette suite, on pose

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \alpha_p = \frac{u_p}{5^p}$$

1. Vérifier que $\forall p \in \mathbb{N},\ \alpha_{p+1} = \dfrac{2}{5}\alpha_p + \dfrac{1}{5}$.
2. En déduire l'expression de α_p en fonction de p puis celle de u_p.

Exercice 3

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$$

1. On considère la suite p définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = u_n + v_n$$

   Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n$$
3. Montrer que la suite $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$ est arithmétique.
   En déduire l'expression de z_n en fonction de n
4. Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 4

Soient u et v les deux suites définies pour tout $n \geqslant 0$ par

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$$

et

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

1. On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.
   (a) Montrer que t et s sont deux suites géométriques.
   (b) En déduire l'expression de t_n (resp. s_n) en fonction de t_0 (resp. s_0).
2. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n, de u_0 et de v_0.

Programme de Colle 6

Suites numériques

- Sens de variation
- Suites arithmétiques et géométriques (terme général, variation, sommes)
- Suites arithmético-géométriques (méthode d'obtention du terme général)
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (méthode d'obtention du terme général)

Probabilités

- Ensembles (Union, intersection, disjoints, partition).
- Evénements (contraire, impossible, certain, incompatibles)
- Calcul des probabilités ($\emptyset$, $\overline{A}$), Crible de Poincaré pour $n = 2$, $n = 3$ et pour des évènements incompatibles
- Probabilités conditionnelles (définition, Bayes, Indépendance)

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 5

Exercice 1

Dans une entreprise de conception de logiciels pour l'informatique, 20 % des employés ont un diplôme en gestion des affaires. 70 % des diplômés en gestion des affaires ont des postes de cadre, alors que seulement 15 % de ceux qui n'ont pas ce diplôme occupent ces postes. Le comité d'entreprise organise en fin d'année une loterie pour tout le personnel. Chaque employé reçoit un billet de loterie et un seul.
Tous les billets sont placés dans une urne et on en tire un totalement au hasard. L'employé gagnant se voit alors offrir un voyage.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
G : " L'employé gagnant a un diplôme de gestion des affaires ".
C : " L'employé gagnant est un cadre de l'entreprise ".
2. Sachant que l'employé gagnant est un diplômé en gestion des affaires, quelle est la probabilité que ce soit un cadre ?
3. Quelle est la probabilité que l'employé gagnant soit un cadre si l'on sait qu'il n'est pas diplômé en gestion des affaires ?
4. Calculer la probabilité des évènements suivants :
" L'employé gagnant est cadre et diplômé en gestion des affaires ".
" L'employé gagnant est cadre et non diplômé en gestion des affaires ".

Exercice 2

Une enquête est faite auprès des inscrits à un stage multi-activités (randonnée, natation, parapente , ...). On note :
• F l'ensemble des femmes participant à ce stage ;
• A l'ensemble des stagiaires, hommes et femmes, pratiquant la randonnée.
L'enquête rélève que :
• F représente 30 % de l'ensemble des stagiaires ;
• A représente 48 % de l'ensemble des stagiaires ;
• chez les stagiaires du groupe A, il y a deux fois plus d'hommes que de femmes.
On interroge un stagiaire au hasard.

1. Quelle est la probabilité que ce stagiaire pratique la randonnée ?
2. Quelle est la probabilité que ce stagiaire soit une femme pratiquant la randonnée ?
3. On interroge au hasard une stagiaire femme. Quelle est la probabilité qu'elle pratique la randonnée ?
4. On interroge trois stagiaires au hasard, de manière indépendante. Quelle est la probabilité que, parmi ces trois stagiaires, aucun ne pratique la randonnée ?

Exercice 3

Dans une entreprise, on choisit un employé au hasard parmi les 800. On considère les événements H:"être un homme", S : "être syndiqué" et M : "être marié". Il y a 300 hommes, 352 employés syndiqués et 424 employés mariés.
Il y a 188 hommes syndiqués, 166 hommes mariés, 208 syndiqués mariés et 144 hommes syndiqués et mariés.

1. Quelle est la probabilité que l'employé choisi au hasard soit un homme ou un syndiqué ou un employé marié.
2. En déduire la probabilité que l'employé soit une femme célibataire non syndiquée.

Exercice 4

Un colis est envoyé de Chine par la poste. On note dans le tableau suivant les probabilités de le recevoir au bout de n jours :

n	1	2	3	4	5	6	7
p	0	0.08	0.09	0.12	0.14	0.15	0.10

Quelle est la probabilité de l'obtenir en moins d'une semaine ?

Programme de Colle 7

Probabilités

- Ensembles (Union, intersection, disjoints, partition).
- Evénements (contraire, impossible, certain, incompatibles)
- Calcul des probabilités ($\emptyset$, $\overline{A}$), Crible de Poincaré pour $n = 2$, $n = 3$ et pour des évènements incompatibles
- Probabilités conditionnelles (définition, Bayes, Indépendance, probabilités composées, probabilités totales)

Principe de récurrence

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 6

Exercice 1

Une usine fabrique 3% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées. 99% des pièces correctes sont acceptées et 98% des pièces défectueuses sont refusées.

1. Calculer la probabilité que la pièce testée soit acceptée.
2. Calculer la probabilité que le contrôle commette une erreur.

Exercice 2

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

- Si au temps $n-1$, il fonctionne, il a la probabilité $a \neq 0$ d'être en panne au temps n.
- Si au temps $n-1$, il est en panne, il a la probabilité $b \neq 1$ d'être en panne au temps n.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

1. Etablir pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre p_n et p_{n-1}.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n en fonction de n et de p_0.

Exercice 3

Une urne contient 2 boules vertes, 3 blanches et 4 rouges. On tire au hasard et successivement 3 boules de l'urne, sans remise.
Calculer la probabilité d'obtenir un tirage unicolore.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 5u_n^3$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$v_n = \ln(u_n)$$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, v_n existe.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = ln(5) + 3v_n$.
4. Montrer que v est arithmético-géométrique.
5. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
6. Conclure quant à l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 3$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}$$

1. Montrer que pour tout n entier, u_n existe et $u_n > 2$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, v_n existe.
3. Montrer que (v_n) est arithmétique.
4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
5. Conclure quant à l'expression de u_n en fonction de n.

Programme de Colle 8

Principe de récurrence

Variables aléatoires discrètes

- Fonction de répartition (Définition et propriétés)
- Loi de probabilité (définition, lien avec la fonction de répartition)
- Espérance (définition, linéarité)
- Variance (définition, Formule de Huygens, $aX + b$), écart-type

Exercices possibles
Exercices 1 à 5 semaine 7

Exercice 1

Une urne contient 2 blanches et 8 noires. On tire successivement 2 boules. Soit B le nombre de blanches et N le nombre de noires obtenues.

1. On suppose que les tirages sont sans remise.
   (a) Déterminer la loi de B puis calculer $E(B)$.
   (b) Trouver une relation liant B et N.
   (c) En déduire la loi de N et son espérance.
2. Refaire la question précédente lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 2

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement 2 boules. On considère les variables aléatoires suivantes :

- P la VAR égale au numéro de la première boule tirée.
- D la VAR égale au numéro de la seconde boule tirée.

1. Donner les lois respectives de P et D sachant que :
   (a) Le tirage se fait avec remise.
   (b) Le tirage se fait sans remise.
2. On considère dorénavant que le tirage se fait avec remise.
   (a) Soit X_1 la VAR égale au plus petit numéro tiré. Calculer $P(X_1 = 5)$. Etablir la loi de X_1. Calculer $E(X_1)$.
   (b) Soit X_2 la VAR égale au plus grand numéro tiré. Calculer $P(X_2 = 5)$. Etablir la loi de X_2. Calculer $E(X_2)$.

Exercice 3

On dispose d'un paquet de 6 cartes. Ces cartes sont numérotées de 1 à 6.
Un joueur A propose à un joueur B le jeu suivant, moyennant une mise de 1 franc que lui verse B à chaque partie : B tire une carte au hasard, montre le nombre β qu'elle porte et remet la carte dans le paquet. Puis A tire une carte au hasard; quand celle-ci porte le nombre α :

- Si $\alpha < \beta$, alors A donne à B la somme $(\beta - \alpha)$ francs : B a donc gagné $(\beta - \alpha - 1)$ francs.
- Si $\alpha > \beta$, alors B donne à A la somme de 1 franc : B a donc perdu 2 francs.
- Si $\alpha = \beta$, alors B a simplement perdu 1 franc, le montant de la mise.

1. Dresser le tableau à double entrée donnant les gains (positifs ou négatifs) de B suivant les différentes valeurs du couple (α, β).
2. Soit X la V.A. représentant les gains de B. Donner la loi de X.
3. Calculer $E(X)$. Le jeu avantage-t-il l'un des joueurs ?
4. Calculer la variance de X.

Programme de Colle 9

<u>Variables aléatoires discrètes</u>

- Fonction de répartition (Définition et propriétés)
- Loi de probabilité (définition, lien avec la fonction de répartition)
- Espérance (définition, linéarité)
- Variance (définition, Formule de Huygens, $aX+b$), écart-type

<u>Limites</u>

- Définitions sous forme de phrases (limite en x_0, à droite, à gauche, limite en $\pm\infty$).
- Tableaux des opérations sur les limites. Théorèmes limites et inégalités, d'encadrement. Limites usuelles, croissances comparées, formes particulières en 0.

Exercices possibles
Exercices 1 à 3 semaine 8

Exercice 1

Calculer $\lim_{x\to x_0} f(x)$ dans chacun des cas suivants.

1. En $\pm\infty$,
$$f(x)=\frac{2x^3+x^2-2x-1}{3x^3+x^2+x-5}$$
2. En $x_0=2$
$$f(x)=\frac{\sqrt{6x-3}-3}{4-x^2}$$
3. En $\pm\infty$,
$$f(x)=\sqrt{x^2-3x+4}-3x$$
4. En $\pm\infty$,
$$f(x)=\frac{x^3-x^2-x+1}{2x^3-3x^2+1}$$
5. En $+\infty$,
$$f(x)=\sqrt{x}-2\ln x+1$$
6. En $+\infty$,
$$f(x)=\ln(x^2+1)-2\ln(x)$$
7. En $+\infty$,
$$f(x)=\frac{2\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$$
8. En $x_0=0$
$$f(x)=\sqrt{x}\ln(x)$$
9. En $x_0=0$
$$f(x)=2\ln(x)+\frac{1}{x}$$
10. En $x_0=0$
$$f(x)=x^2e^{-\frac{1}{x}}$$

Exercice 2

Deux urnes contiennent respectivement 4 boules rouges et 3 boules vertes, 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire au hasard une boule dans la première (sans l'y remettre), puis on procède au tirage d'une deuxième boule, dans la même urne si la première boule tirée est rouge, dans l'autre urne si la première boule tirée est verte.
On notera R_i : "La i^{eme} tirée est rouge" et V_i : "La i^{eme} tirée est verte".

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules vertes ?
2. Deux boules rouges ?
3. On sait que les deux boules tirées sont de même couleur. Quelle est la probabilité qu'elles soient rouges ?

Exercice 3

On lance un dé ordinaire. Si on fait 1, on tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Si on fait 2 ou 3, on tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Si on fait 4, 5 ou 6, on tire (en trichant) un as.
On notera A : "Tirer un as", P : "Tirer dans le jeu de 32 cartes", G : "Tirer dans le jeu de 52 cartes" et T : "Tirer en trichant".

1. Quelle est la probabilité de tirer un as ?
2. Ayant tiré un as, quelle est la probabilité d'avoir triché ?

Programme de Colle 10

Limites

- Définitions sous forme de phrases (limite en x_0, à droite, à gauche, limite en $\pm\infty$).
- Tableaux des opérations sur les limites. Théorèmes limites et inégalités, d'encadrement. Limites usuelles, croissances comparées, formes particulières en 0.

Dénombrement

- Combinaison, formules, triangle de Pascal, binôme de Newton,
- p-listes, arrangement, permutation.

Exercices possibles
Exercices 1 à 3 semaine 9

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{(n+1)!}{(n+2)!}+\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n-1}{2}}$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=3n(n-1)$$

$$\binom{4n-17}{2n-1}=\binom{4n-17}{2n-3}$$

Exercice 3

1. Quel est le coefficient de x^4 dans le développement de $(2x+1)^8$.
2. Même question avec $(2x+3)^5$.

Exercice 4

1. Développer $(2-x)^4$.
2. Développer $(2+\frac{x}{2})^5$.

Exercice 5

Sans calculatrice, calculer 101^3 et $(\sqrt{2}+1)^5$

Exercice 6

Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 vertes et 2 rouges. On choisit au hasard et simultanément 2 chaussures.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 chaussures de la même couleur ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 pied gauche et 1 pied droit ?
3. Quelle est la probabilité de reconstituer 1 vraie paire de chaussures ?

Exercice 7

On effectue 5 tirages successifs avec remise dans une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9

1. Quelle est la probabilité d'obtenir aux deux premiers tirages la boule 2 ?
2. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules multiples de 3 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir des nombres supérieurs à 5 sachant qu'on a obtenu que des boules paires ?

Exercice 8

1. De combien de façon différentes peut-on garer 6 voitures dans 10 places numérotées de 1 à 10 ?
2. En utilisant les lettres du mot **NATURE**, on écrit un mot (ayant un sens ou non) de 4 lettres. Combien de mots différents peut-on écrire ?
3. 8 enfants s'assoient côte à côte sur un banc. Combien y a-t-il de possibilités ?

Programme de Colle 11

Dénombrement

- Combinaison, formules, triangle de Pascal, binôme de Newton,
- p-listes, arrangement, permutation.

Continuité et Dérivabilité

- Définition de continuité, de la dérivabilité et lien avec la continuité, fonctions de classe C^k, C^∞.
- Fonctions continues et dérivables de référence. Règles de calcul.

Exercices possibles
Exercices 1 à 8 semaine 10

Exercice 1

Calculer $\lim_{x\to x_0} f(x)$ dans chacun des cas suivants.

1. En $\pm\infty$,
$$f(x) = -x^2 + 3x - 1 + 2e^{-x}$$
2. En $\pm\infty$,
$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}$$
3. En $x_0 = 0$,
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x}$$
4. En $+\infty$,
$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$
5. En $+\infty$,
$$f(x) = \left[2x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]$$
6. En $\pm\infty$,
$$f(x) = \left[x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)\right]$$

Exercice 2

Etudier la continuité sur leur ensemble de définition des fonctions f.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{2x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2\sqrt{x}+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \in [-1;1] \setminus \{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition, si elles sont C^∞ puis calculer la dérivée.

$$a(x) = \ln(1+x^2) \qquad b(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1}$$

$$c(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2} \qquad d(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$$

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur I. Quelles sont les fonctions qui sont dérivables sur I ? Expliciter la dérivée de chacune de ces fonctions sur son intervalle de dérivabilité.

1. $I =]-\infty, 1]$ et $c(x) = x\sqrt{1-x}$
2. $I = \mathbb{R}$ et $e(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$

Programme de Colle 12

Continuité et Dérivabilité

- Définition de continuité, de la dérivabilité et lien avec la continuité, fonctions de classe C^k, C^∞.
- Fonctions continues et dérivables de référence. Règles de calcul.
- Théorème de prolongement continu. Théorème de prolongement de la dérivée.
- Théorème des valeurs intermédiaires et propositions sur l'image par une fonction continue d'un intervalle.
- Inégalité des Accroissements finis.
- Lien entre convexité et propriétés des dérivées successives.

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 11

Exercice 1
Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(4-3x)}{x^2-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
4. Etudier si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = 1$.

Exercice 2
Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-3x^2}-1}{x^2+x^4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
4. Etudier si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

Exercice 3
Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{6-2x}-2}{4x^2-4x}$$

Mêmes questions qu'à l'exercice précédent, on étudiera pour finir si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$ puis en $x_0 = 1$.

Exercice 4
Soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{7-x}-3}{x+2}$$

Mêmes questions qu'à l'exercice 3, on étudiera pour finir si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = -2$.

Exercice 5
Considérons les fonctions suivantes :

$$a(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$
$$b(x) = (x-2)\sqrt{2x-x^2}$$
$$c(x) = 1 + x\exp(\frac{1}{1-x})$$
$$d(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$$

1. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
2. Montrer qu'elles sont toutes continues sur leurs domaines de définition respectifs.
3. Déterminer les fonctions qui sont C^1 sur leurs domaines de définition respectifs.

Programme de Colle 13

Continuité et Dérivabilité

- Théorème de prolongement continu. Théorème de prolongement de la dérivée.
- Théorème des valeurs intermédiaires et propositions sur l'image par une fonction continue d'un intervalle. Inégalité des Accroissements finis. Lien entre convexité et propriétés des dérivées successives.

Résolution de systèmes linéaires

- Définitions (système homogène, carré, triangulaire, de Cramer)
- *Méthode* : pivot de Gauss

Exercices possibles
Exercices 1 à 5 semaine 12

Exercice 1

Les systèmes suivant sont-ils résolubles. Si oui, expliciter les solutions :

1.
$$\begin{cases} x-3y+6z=0 \\ 6x-8y+12z=0 \\ 3x-3y+4z=0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} -x+2y+2z=3 \\ 2x-y-z=5 \\ -x-y-z=1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x+y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x+3y-z+t=1 \\ 2x+13y-7z+2t=2 \\ x-y+z+t=0 \\ x+7y-4z+t=-1 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=12 \\ u+3v=0 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} x+y-t=1 \\ -x+y+z=0 \\ -y+z+t=0 \\ x-z+t=1 \end{cases}$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes selon les valeurs de λ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.
$$(E_\lambda) : \begin{cases} (1-\lambda)x-3y+6z=0 \\ 6x-(8+\lambda)y+12z=0 \\ 3x-3y+(4-\lambda)z=0 \end{cases}$$

2.
$$(F_\lambda) : \begin{cases} -\lambda x+2y+2z=0 \\ 2x-\lambda y-z=0 \\ -x-y-\lambda z=0 \end{cases}$$

3.
$$(G_\lambda) : \begin{cases} -\lambda x+y=0 \\ x-\lambda y+z=0 \\ y-\lambda z=0 \end{cases}$$

Programme de Colle 14

Résolution de systèmes linéaires

- Définitions (système homogène, carré, triangulaire, de Cramer)
- *Méthode* : pivot de Gauss

Bijections

- Définition de bijection et de fonction réciproque.
- Théorème de la bijection continue.
- Dérivée de la fonction réciproque.

Exercices possibles
Exercices 1 à 2 semaine 13

Exercice 1
Démontrer que les fonctions suivantes f réalisent une bijection de l'intervalle I donné sur l'intervalle $f(I)$ que l'on précisera. Enoncer les propriétés de f^{-1}.

1. Avec $I =]\frac{2}{3}; +\infty[$,
$$f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$$
.
2. Avec $I = [-1; 0]$,
$$f(x) = \frac{2x^2+1}{4x^2+1}$$
3. Avec $I = \mathbb{R}$
$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

Exercice 2
Montrer que les équations suivantes possède une solution dans l'intervalle I

1. Avec $I = [1, 10]$,
$$\ln x = \frac{x^2-5}{x+2}$$
2. Avec $I = [\ln 2, 2\ln 2]$,
$$e^x = 2 + x$$

Exercice 3
On note (E_n) l'équation
$$(E_n) : \frac{x^3}{x^2+1} = n$$

1. Soit f la fonction définie pour x réel par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$
   (a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
   (b) Enoncer les propriétés de f^{-1} et donner son tableau de variation.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'équation (E_n) possède une unique solution, notée x_n, sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4
On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + x, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n.

Exercice 5
Posons pour chaque entier $n \geqslant 2$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle à expliciter.
2. Montrer que, l'équation $x^n+1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette racine.

Programme de Colle 15

Bijections

- Définition de bijection et de fonction réciproque.
- Théorème de la bijection continue.
- Dérivée de la fonction réciproque.

Fonctions numériques de deux variables réelles

- Sous-ensemble remarquables de $\mathbb{R}^2$ (Droites, Cercles).
- Ligne de niveau.
- *Mode de calcul de dérivées partielles d'ordre 1 et 2.*
- *Applications : fonction d'utilité et équilibre du consommateur en microéconomie.*

Exercices possibles
Exercices 1 à 5 semaine 14

Exercice 1 (Ensemble de défintion)

Déterminer l'ensemble de défintion des fonctions suivantes :

- $f(x,y) = \frac{x}{x+2y}$
- $g(x,y) = \frac{\ln y}{x^2+2}$
- $h(x,y) = \frac{\sqrt{1-x}}{x+y-1}$
- $i(x,y) = \sqrt{-x-y} + \sqrt{1-x}$
- $j(x,y) = \sqrt{(x+y-1)}$
- $k(x,y) = \sqrt{2-x} + \ln(x-2y+1)$
- $l(x,y) = \frac{2x+y}{x^2+y^2-4}$
- $m(x,y) = \frac{x-y}{2x^2+2y^2-8}$

Exercice 2 (Ligne de niveau)

Déterminer la ligne de niveau $f(x,y) = c$ où

1. $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 - 7$ et $c = 0$
2. $f(x,y) = \frac{e^{2x}}{e^y}$ et $c = e^8$
3. $f(x,y) = y - x + 3$ et $c = 5$

Exercice 3 (Dérivées partielles)

Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du second ordre des fonctions suivantes, définies et dérivables sur Ω :

- $a : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + (3-x-y)^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- $b : (x,y) \mapsto y^3 - 3x^2y$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- $c : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + e^{-xy}$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- $d : (x,y) \mapsto (x^2-y)(3x^2-y)$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
- $e : (x,y) \mapsto x(\ln y)^2 + y^2$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y > 0\}$.
- $f : (x,y) \mapsto (\ln y)^2 + 2\ln y + x^2$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y > 0\}$.

Exercice 4 (Microéconomie)

Soient deux biens X et Y et une fonction d'utilité

$$U : (x,y) \mapsto xy^2$$

où x représente la quantité consommée du bien X et y la quantité consommée du bien Y.
Soient R le revenu enployable pour les achats, p_x et p_y les prix unitaires des biens X et Y.
On prend $p_x = 1$, $p_y = 2$ et $R = 20$.

1. Ecrire la contrainte budgétaire du consommateur.
2. Déterminer l'équilibre du consommateur.
3. Quel est alors le niveau de l'utilité du consommateur ?

Programme de Colle 16

Fonctions numériques de deux variables réelles

- Sous-ensemble remarquables de $\mathbb{R}^2$ (Droites, Cercles).
- Ligne de niveau.
- *Mode de calcul de dérivées partielles d'ordre 1 et 2.*
- *Applications : fonction d'utilité et équilibre du consommateur en microéconomie.*

Lois discrètes usuelles

- Loi uniforme (définition, espérance, variance, exemple caractéristique)
- Loi de Bernoulli (définition, espérance, variance, exemple caractéristique)
- Loi binomiale (définition, espérance, variance, exemple caractéristique, lien Bernoulli - binomiale, somme)
- Loi hypergéométrique (Définition, espérance, exemple caractéristique)

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 15

Exercice 1

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement n boules avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3.
Soit X_n le nombre de boules blanches et Y_n le nombre de points obtenus.
Déterminer la loi de X_n. Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire la loi de Y_n puis $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

Exercice 2

Une urne contient 3 boules bleues, 2 vertes, 5 rouges.
On tire une à une, avec remise 3 boules de cette urne. Soit N la VAR égale au nombre de boules bleues tirées. Quelle est la loi de N ? Préciser $E(N)$ et $V(N)$.
On tire simultanément 3 boules de cette urne. Soit X le nombre de boules bleues tirées. Etablir la loi de X. Préciser $E(X)$. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de la même couleur. Quelle est la probabilité de tirer 1 boule de chaque couleur. Quelle est la probabilité de tirer 2 boules au moins de la même couleur.

Exercice 3

1. On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question, k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses. On lui attribue un point par bonne réponse.
   Soit X_1 le nombre de points obtenus. Déterminez la loi de X_1.
2. Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, l'examinateur lui offre la possibilité d'une deuxième réponse. On attribue alors $\frac{1}{2}$ point par bonne réponse ainsi obtenue.
   On note X_2 le nombre de points obtenus lors de ces seconds choix. Déterminez la loi de X_2.
3. Soit X le nombre total de points obtenus. Calculez $E(X)$.
4. Déterminez k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

Exercice 4

Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 2000 mètres à la vitesse de 10 kilomètres par heure. Il doit franchir 10 obstacles, indépendants les uns des autres. La probabilité de franchir un obstacle sans faute est de $\frac{3}{5}$.

1. On note X la variable aléatoire qui désigne le nombre d'obstacles franchis sans fautes par le cavalier. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance.
2. On suppose que si un obstacle est franchi sans faute, le cavalier ne perd pas de temps, dans le cas contraire, le cavalier perd une minute. Soit T la variable aléatoire égale à la durée en minutes du parcours. Exprimer T en fonction de X, en déduire la durée moyenne d'un parcours.

Programme de Colle 17

Lois discrètes usuelles

- Loi uniforme (définition, espérance, variance, exemple caractéristique)
- Loi de Bernoulli (définition, espérance, variance, exemple caractéristique)
- Loi binomiale (définition, espérance, variance, exemple caractéristique, lien Bernoulli - binomiale, somme)
- Loi hypergéométrique (Définition, espérance, exemple caractéristique)

Convergence des Suites

- Définitions de convergence, divergence, divergence vers $\pm\infty$
- Limites d'une suite géométrique
- Limites et inégalités, théorème d'encadrement, théorème de convergence monotone

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 16

Exercice 1

Déterminer quand elle existe la limite de (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{-3n^2+4n+1}{2n^3+1}$$

$$u_n = \frac{4n-5}{3n-1}$$

$$u_n = \sqrt{2n^4+n+2} - 3n$$

$$u_n = \ln(3n+1) - \ln(6n-1)$$

$$u_n = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 4n + \frac{1}{n}$$

$$u_n = 2\ln(n) - \ln(n^2+1)$$

$$u_n = e^n - 3n^2 - 2n + 1$$

$$u_n = 2^n 5^{-n}$$

$$u_n = 3^n - 5n^2$$

Exercice 2

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{5^n}{n!}$

1. Déterminer le sens de variation de u.
2. En déduire que la suite u converge.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 9$,
$$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$$
4. En déduire qu'on a pour tout entier $n \geq 9$
$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-9} u_9$$
5. En déduire la limite de u.

Exercice 3

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n!}{n^2}$

1. Déterminer le sens de variation de u.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$,
$$u_{n+1} \geqslant 2u_n$$
3. En déduire qu'on a pour tout entier $n \geq 3$
$$u_n \geqslant 2^{n-3} u_3$$
4. En déduire la limite de u.

Programme de Colle 18

Convergence des Suites

- Définitions de convergence, divergence, divergence vers $\pm\infty$
- Limites d'une suite géométrique
- Définitions d'équivalence et de négligeabilité
- Limites et inégalités, théorème d'encadrement, théorème de convergence monotone
- *Méthode : point fixe, utilisation du théorème des accroissements finis.*
- Suites adjacentes.

Exercices possibles
Exercices 1 à 3 semaine 17

Exercice 1
On considère la suite u définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$$

et $u_0 = 2$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$.
2. Etudier la monotonie de la suite u.
3. Montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 2
Soit u la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+5u_n}$$

et $u_0 \geqslant 0$.

1. Montrer que $\forall\, n \geqslant 0$, u_n existe et $u_n \geqslant 0$.
2. En déduire la monotonie de u
3. La suite est-elle convergente ? Calculer sa limite.

Exercice 3
Soit u la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$$

et $u_0 = 3$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.
2. Déterminer la monotonie de la suite u.
3. Justifier la convergence de la suite u et expliciter sa limite.

Exercice 4
On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \frac{u_n}{2\,(u_n+1)}$$

1. Soit la fonction $f : x \mapsto 1 - \dfrac{x}{2\,(1+x)}$. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. En déduire que $f([0,1]) \subset [0,1]$.
3. Montrer que $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer en étudiant $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $[0,1]$ que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$. On la notera α.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \in [0,1]$.
6. Démontrer que $\forall n \geqslant 0$,
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$
7. En déduire que $\forall n \geqslant 0$,
$$|u_n - \alpha| \leqslant (\frac{1}{2})^n$$
8. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Programme de Colle 19

Convergence des Suites

- *Méthode : point fixe, utilisation du théorème des accroissements finis.*
- Suites adjacentes.

Matrices

- Définition de matrice et matrices particulières,
- Définition de l'addition, de la multiplication par un réel,
- Définition de la transposée, du produit, de matrices qui commutent,
- Définition de la puissance d'une matrice, puissance d'une matrice diagonale, binôme de Newton.
- *Méthode : Utilisation d'une récurrence ou du binôme de Newton*

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 18

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} q & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ où $q \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une matrice M telle que $A = qI + M$.
2. Calculer M^2. En déduire A^n.

Exercice 2

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel a tel que $A = aI + B$. Calculer B^2 et B^3.
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer A^n.

Exercice 3

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = a_n I + b_n A$
2. Expliciter a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n.

Exercice 4

Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 3^{n-1} J$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n

Exercice 6

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a^n P + b^n Q$

Programme de Colle 20

Matrices

- Définition de matrice et matrices particulières,
- Définition de l'addition, de la multiplication par un réel, de la transposée.
- Définition de la puissance d'une matrice, puissance d'une matrice diagonale, binôme de Newton.
- *Méthode : Utilisation d'une récurrence ou du binôme de Newton*

Révisions : Dénombrement

- Combinaison, formules, triangle de Pascal, binôme de Newton,
- p-listes, p-listes d'éléments disctincts, permutation.

Exercices possibles
Exercices 1 à 6 semaine 19

Exercice 1
Trois personnes A, B, C se répartissent cinq gâteaux différents, l'une en prend 1, les deux autres en prennent chacune 2.
Combien y a-t-il de distributions possibles ?

Exercice 2
On lance 5 fois de suite une pièce de monnaie en notant dans l'ordre les résultats apparus (pile ou face).

1. Combien existe-t-il de résultats possibles ?
2. Dans combien de résultats y a-t-il deux "pile" ?
3. Dans combien de résultats y a-t-il plus de "pile" que de "face" ?

Exercice 3
Dans un jeu ordinaire de 32 cartes, on choisit au hasard et simultanément 5 cartes, formant ainsi une main.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Quel est le nombre de mains contenant un carré (4 cartes identiques) ?
3. Quel est le nombre de mains contenant un full (3 as et 2 rois) ?
4. Quel est le nombre de mains contenant une paire exactement ?
5. Quel est le nombre de mains contenant un brelan exactement ?

Exercice 4
Combien existe-t-il de nombres de 5 chiffres (ne commençant pas par 0) et contenant au moins 4 fois le chiffre 1 ?

Exercice 5
Un sac contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire simultanément 4 jetons de ce sac.

1. Combien existe-t-il de tirages possibles ?
2. Parmi ceux-ci combien de tirages :
   (a) ne comportent que des numéros pairs ?
   (b) ne comportent que des numéros impairs ?
   (c) ne comportent qu'un seul numéro pair ?
   (d) comportent au moins un numéro pair ?
   (e) comportent moins de deux numéros pairs ?

Exercice 6
Un convoi de véhicules publicitaires est formé de 4 camions et 2 voitures tous distincts. Ils pénètrent les uns après les autres sur une place de village.

1. De combien de façons différentes peuvent-ils se présenter ?
2. Le premier véhicule est un camion, combien y a-t-il dans ce cas de convois possibles ?
3. Soit X la VAR égale au nombre de camions en tête du convoi. Etablir la loi de X et calculer $E(X)$. Tracer sa fonction de répartition.

Programme de Colle 21

Révisions : Dénombrement

- Combinaison, formules, triangle de Pascal, binôme de Newton,
- p-listes, p-listes d'éléments disctincts, permutation.

Sommes

- Symbole de sommation : propriétés de calculs,
- sommes remarquables ($\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$, $\sum q^k$)
- *Méthode : changement de variable dans une somme*

Révisions : suites numériques

- Suites géométriques, arithmétiques et leurs sommes de termes consécutifs.
- Suites arithmético-géométriques.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Exercices possibles
Exercices 1 à 6 semaine 20

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes :

1. $$A_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)$$

2. $$B_n = \sum_{k=0}^{n+1} (6k^2+4k+1)$$

3. $$C_n = \sum_{j=3}^{n} (3j^2+1)$$

4. $$D_n = \sum_{i=0}^{2n} 3 \times 4^{i+1}$$

5. $$E_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{5 \times 2^j}{3^{j+1}}$$

6. $$F_r = \sum_{k=0}^{3r} \frac{2^{2k}}{3^{4k}}$$

7. $$G_k = \sum_{s=0}^{k} \frac{2^{3s-1}}{3^{2s+2}}$$

Exercice 2

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in N$,
$$\sum_{k=0}^{n} (4k-1) = 2n^2+n-1$$

2. Retrouver ce résultat en utilisant les formules usuelles.

Exercice 3

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in N^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} (6k+2) = 3n^2+5n+2$$

2. Retrouver ce résultat en utilisant les formules usuelles.

Exercice 4

1. Démontrer par récurrence que $\forall n \in N^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Programme de Colle 22

<u>Sommes</u>

- Symbole de sommation : propriétés de calculs,
- sommes remarquables ($\sum k$, $\sum k^2$, $\sum k^3$, $\sum q^k$)
- *Méthode : changement de variable dans une somme*

<u>Révisions : suites numériques</u>

- Suites géométriques, arithmétiques et leurs sommes de termes consécutifs.
- Suites arithmético-géométriques.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

<u>Comparaison de fonctions</u>

- Définition d'équivalence et de négligeabilité.
- Equivalents de référence.
- Propriétés de calcul sur les équivalents.
- Définition d'équivalence pour les suites.

<u>Révisions : limites</u>

- Limites particulières
- Branches infinies

Exercices possibles
Exercices 1 à 4 semaine 21

Exercice 1

En utilisant les équivalents usuels, calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt(x)\ln(1-\sqrt{x})}{x(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^2)}{2x^3-x^4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-4x^2)}{\sqrt{1+2x^2}-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x(e^{2x}-1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)(1-e^{3x})}{(x^2+1)(x^3+4x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)\ln(1+x)}{e^x-e^{-x}}$$

Exercice 2

En utilisant les équivalents usuels, calculer les limites suivantes.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\ln(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{1+x^2}-x}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(5-4x)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x^2)}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^7-1}{x^5-1}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^{x-2}-1}{x^2-x-2}$$

Exercice 3

Trouver un équivalent simple de la suite $(u_n)_n$ et déterminer sa limite :

$$u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n = 1-\exp\left(\frac{1}{2^n+1}\right)$$

$$u_n = 2^{n+1}$$

$$u_n = \ln(n)$$

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$u_n = \ln(n+1) - \ln n$$

$$u_n = n\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

Programme de Colle 23

Comparaison de fonctions

- Définition d'équivalence et de négligeabilité.
- Equivalents de référence.
- Propriétés de calcul sur les équivalents.
- Définition d'équivalence pour les suites.

Révisions : limites particulières
Révisions : branches infinies

Intégrales

- Définition de primitive et d'intégrale.
- Théorème d'existence des primitives, primitives de référence.
- Intégrales : Linéarité et relation de Chasles
- *Méthodes : Intégration par parties, changement de variable.*

Révisions : formules sur les puissances, ln, exp

Exercices possibles
Exercices 1 à 3 semaine 22

Exercice 1

Justifier que chacune des fonctions suivantes possède, sur l'intervalle considéré, une primitive puis expliciter l'unique primitive F satisfaisant à la condition donnée :

1. $a(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(0) = 1$.
2. $b(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^5$ sur $\mathbb{R}$ avec $F(-1) = 1$
3. $c(x) = \dfrac{4}{(3x-1)^2} \exp(\dfrac{2}{3x-1})$ sur $[1, +\infty[$ avec $F(1) = e$.

Exercice 2

Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer.

$$I_1 = \int_1^{10} e^{2x} dx \qquad I_2 = \int_1^2 3^x dx$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}} dt \qquad I_4 = \int_1^2 \frac{(\ln t)^5}{t} dt$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations par parties :

$$M = \int_1^4 x^2 \ln x dx$$

$$N = \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{(t+1)^3} dt$$

$$O = \int_1^2 (x+1)e^x dx$$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\int_1^2 \sqrt{3x+1}x\, dx \quad (u = 3x+1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} \quad (u = e^x)$$

(On remarquera pour cette dernière intégrale que $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$ avec a et b deux réels à déterminer.)

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_a^{1/a} \frac{\ln x}{x} dx$$

1. Montrer par une intégration par parties que
$$I(a) = [ln(x)^2]_a^{\frac{1}{a}} - I(a)$$
2. En déduire $I(a)$.
3. Recalculer $I(a)$ en posant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$ et obtenir que $I(a) = -I(a)$ et en déduire $I(a)$.

Programme de Colle 24

Intégrales

- Définition de primitive et d'intégrale.
- Théorème d'existence des primitives, primitives de référence.
- Intégrales : Linéarité et relation de Chasles.
- *Méthodes : Intégration par parties, changement de variable.*

Révisions : formules sur les puissances, ln, exp

Matrices inversibles

- Définition, inverse de I_n, d'une matrice diagonale.
- Propriétés de calcul.
- Matrice de système, *méthode : pivot de Gauss.*
- *Méthodes pour obtenir l'inversibilité ou l'inverse.*
- *méthode : calcul de A^n*

Exercices possibles
Exercices 1 à 5 semaine 23

Exercice 1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - A$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 2

Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et le cas échéant déterminer son inverse.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Inverser la matrice A associée au système donné puis en déduire la résolution du système.

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ -x + y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

Exercice 4

Soient a, b deux réels. On pose $P = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer PQ.
2. Montrer que si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Qu'en est-il si $(a, b) = (0, 0)$?

Exercice 5

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice D telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$ et expliciter A^n.

Programme de Colle 25

Matrices inversibles

- Définition, inverse de I_n, d'une matrice diagonale.
- Propriétés de calcul.
- Matrice de système, *méthode : pivot de Gauss.*
- *Méthodes pour obtenir l'inversibilité ou l'inverse.*
- *méthode : calcul de A^n*

Applications des intégrales

- Positivité de l'intégrale. Inégalité de la moyenne.
- Point méthode : *fonction définie par une intégrale.*
- Aire d'une surface et intégrale.

Révisions : points méthodes sur la continuité et la dérivabilité

Exercices possibles
Exercices 1 à 5 semaine 24

Exercice 1

Etudier la monotonie des suites suivantes ($n \in \mathbb{N}^\times$).

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

$$b_n = \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3}dx \qquad c_n = \int_1^n (1-x)^3 e^x dx$$

Exercice 2

On pose $I_n = \int_1^n \frac{x}{1+x^3}dx$

1. Déterminer la monotonie de la suiet (I_n).
2. Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{2x^2} \leqslant \frac{x}{1+x^3} \leqslant \frac{1}{x^2}$.
3. Montrer que la suite (I_n) est majorée.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et que $\frac{1}{2} \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} I_n \leqslant 1$.

Exercice 3

$\forall n \geqslant 1$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)dt$.

1. Calculer I_1.
2. Déterminer la monotonie des suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\forall x \in [0;1]$, $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$
4. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
6. Par une intégration par parties, montrer que $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n+2}$
7. En déduire la convergence de la suite (J_n).
8. Montrer que J_n est équivalent à $\frac{ln(2)}{n+1}$ en $+\infty$.

Exercice 4

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0;1]$, $0 \leqslant (1-t)^n e^t \leqslant e$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n!}$
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$

Exercice 5

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, justifier que la fonction est C^1 sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.

$$a : x \mapsto \int_{-1}^{x} \frac{dt}{t^4+1}$$

$$b : x \mapsto \int_x^{-4} \sqrt{1+t^2}dt \qquad c : x \mapsto \int_{1/2}^{x} \frac{dt}{t^2-t}$$

Programme de Colle 26

Applications des intégrales

- Positivité de l'intégrale. Inégalité de la moyenne.
- Point méthode : *fonction définie par une intégrale.*
- Aire d'une surface et intégrale.

Révisions : points méthodes sur la continuité et la dérivabilité

Chaîne de Markov

Révisions : probabilités et VAR

- Poincaré, composées, totales
- Loi d'une VAR, fonction de répartition.
- Formules de calcul de l'espérance et de la variance.

Exercices possibles
Exercices 1 à 5 semaine 25

Exercice 1

Deux pièces A et B sont reliées entre elles par une porte ouverte. Seule la pièce B possède une issue vers l'extérieur. Une guêpe initialement dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. Son trajet obéit aux règles suivantes :

- Lorsqu'elle est en A au temps $t = n$, alors, au temps $t = n+1$, elle reste en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, ou elle passe en B avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$
- Lorsqu'elle est en B au temps $t = n$, alors, au temps $t = n+1$, elle retourne en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$, ou elle reste en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ou elle sort à l'air libre avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

Au temps $t = 0$, la guêpe est en A. Lorsqu'elle sort à l'air libre, elle ne revient plus.
On note $\mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{B}_n$, resp. $\mathcal{S}_n$) les événements : "à l'instant $t = n$, elle est en A (resp. en B, resp. elle sort)", et a_n, b_n, s_n leurs probabilités respectives.

1. Calculer a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1.
2. On pose $Z_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Expliciter une matrice M telle que $Z_{n+1} = MZ_n$ puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_n = M^n Z_0$
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $3P^2 - 9P + 10I_2 = 0_2$. En déduire que P est inversible et expliciter son inverse
4. Déterminer une matrice H telle que $H = P^{-1}MP$, calculer H^n
5. Exprimer H^n en fonction de P et M^n.
En déduire les 4 coefficients de la matrice M^n.
6. Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
7. Justifier que $\forall n \geqslant 2$, $s_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1}$. En déduire s_n en fonction de n.

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$
2. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe des réels a_n et b_n tels que :
$A^n = a_n A^2 + b_n A$ avec $\left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & b_n + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n \end{array} \right.$.
Donner a_1 et b_1
3. Montrer que pour tout n non nul : $a_n + b_n = 1$.
En déduire que : $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$
4. Exprimer alors b_n et $a_n$en fonction de n.
5. Un point lumineux se déplace sur les sommets d'un triangle ABC selon le protocole suivant :
   - A l'instant 0, le point lumineux se situe en A
   - Si à l'instant $n \in \mathbb{N}$, le point lumineux est en A, à l'instant $n+1$ il est en B
   - Si à l'instant $n \in \mathbb{N}^\times$, le point lumineux est en B, à l'instant $n+1$ il est en A avec la probabilité $\frac{1}{4}$, en B avec la probabilité $\frac{1}{2}$, en Cavec la probabilité $\frac{1}{4}$.
   - Si à l'instant $n \in \mathbb{N}^\times\backslash\{1\}$ le point lumineux est en C, à l'instant $n+1$ il est en B.

   On note A_n l'évènement " le point lumineux se trouve à l'instant n sur le sommet A", de même pour B_n et C_n. On note U_n la matrice colonne :
$U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.
Préciser U_0 et U_1.
6. Utiliser la formule des probabilités totales et montrer que : $U_{n+1} = AU_n$
7. En déduire que pour tout entier n non nul : $U_n = A^n U_0$. Préciser U_2, puis montrer que : $U_n = a_n U_2 + b_n U_1$.
8. En déduire les probabilités $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ en fonction de n, ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.

Programme de Colle 27

Chaîne de Markov

Révisions : probabilités et VAR

- Poincaré, composées, totales
- Loi d'une VAR, fonction de répartition.
- Formules de calcul de l'espérance et de la variance.

Séries

- Définition de série, convergence, convergence absolue, propriété de linéarité
- Séries de référence (géométrique, exponentielle)

Exercices possibles
Exercices 1 à 2 semaine 26

Exercice 1

Justifer la convergence et calcule la somme des séries suivantes dont le terme général est :

1. Pour $k \geq 0$,
$$u_k = (3k)\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$
2. Pour $k \geq 0$,
$$u_k = (2k-3)\left(\frac{2}{3}\right)^k$$
3. Pour $k \geq 0$,
$$u_k = (k^2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$
4. Pour $k \geq 1$,
$$u_k = (k^2+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$$
5. Pour $k \geq 0$,
$$u_k = (3k-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}$$

Exercice 2

Justifer la convergence et calcule la somme des séries suivantes :

1. $$u_k = \frac{3}{k!}$$
2. $$u_k = \frac{2k+1}{k!}$$
3. $$u_k = \frac{k^2}{(k)!}$$
4. $$u_k = \frac{k+3^k}{k!}$$
5. $$u_k = \frac{k^2-k}{k!}$$
6. $$u_k = \frac{k^2+1}{k!}(2)^k$$

Programme de Colle 28

<u>Séries</u>

- Définition de série, convergence, convergence absolue, propriété de linéarité
- Séries de référence (géométrique, exponentielle)

<u>Compléments sur les probabilités</u>

- Probabilités totales pour un S.C.E. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(X=i)_{n\in\mathbb{N}}$
- Espérance et variance d'une VAR infinie
- Loi et espérance d'une VAR $f(X)$

<u>Révisions : lois U, B et H</u>

Exercices possibles
Exercices 1 à 2 semaine 27

Exercice 1

On admet que l'égalité $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ est valable pour $x \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$.
Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 2/3$. Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est de $p^n/2$ quand $n \geqslant 1$; par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est de $1/2$.

1. Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant.
   Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n]\!]$. On considère une famille de n enfants ;
   calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.
4. Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

Exercice 2

On désigne par x un nombre réel appartenant à $]0,1[$. N et n sont des 2 nombres entiers naturels non nuls. On considère une succession (éventuellement infinie) de jets d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir "pile" lors d'un jet est $1-x$ et que la probabilité d'obtenir "face" est x. Les jets sont supposés indépendants.

On désigne enfin par S_n le nombre de fois où l'on a obtenu pile au cours des n premiers jets, par T_n le numéro du jet où l'on obtient pile pour la n-ième fois.

1. Préciser la loi de S_n. Donner l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.
2. Préciser la loi de T_1. Calculer l'espérance et la variance de cette variable aléatoire. Pour la variance, on commencera par calculer $E(T_1.(T_1-1))$.
3. L'objet de cette question est de calculer l'espérance de T_r. Soit k un nombre entier naturel et r un nombre entier naturel non nul.
   (a) Montrer que l'événement $\{T_r = k+r\}$ est réalisé si et seulement si les événements $\{S_{k+r-1} = r-1\}$ et "pile est obtenu au $(k+r)$-ième jet" le sont. En déduire la loi de T_r.
   (b) Vérifier que la somme des probabilités des événements $\{Tr = k+r\}$, où k appartient à $\mathbb{N}$, est égale à 1. Calculer l'espérance de T_r. On admettra que la série de terme général $\binom{r+k}{r}.x^k$, k appartenant à $\mathbb{N}$, est convergente, de somme $\frac{1}{(1-x)^{r+1}}$, et on rappelle que $p\binom{N}{p} = N.\binom{N-1}{p-1}$, pour tout N,p appartenant à $\mathbb{N}^*$.
4. Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1. Un joueur parle de la façon suivante. Lors du n-ième jet, il mise 1 euro.
   - Si "pile" sort, il reçoit la somme a (en euros), et il perd sa mise ;
   - sinon, il perd sa mise.

   On désigne par G_n la somme des profits et pertes (celles-ci étant comptées négativement) du joueur après son n-ième succès (qui survient donc à l'issue du jet ayant pour numéro T_n).
   (a) Montrer que $G_1 = a - T_1$ et calculer l'espérance de G_1.
   (b) Plus généralement, pour tout nombre entier naturel non nul r, exprimer G_r en fonction de T_r et en déduire l'espérance de G_r
   (c) Étudier la limite de G_r quand r tend vers $+\infty$.

Programme de Colle 29

Compléments sur les probabilités

- Probabilités totales pour un S.C.E. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(X=i)_{n\in\mathbb{N}}$
- Espérance et variance d'une VAR infinie
- Loi et espérance d'une VAR $f(X)$

Révisions : lois U, B et H

Lois discrètes usuelles

- Loi géométrique (Définition, espérance, variance, exemple caractéristique)
- Loi de Poisson (Définition, espérance, variance, somme)

Révisions : Bijection : points méthodes

Exercices possibles

Exercices 1 à 2 semaine 28

Exercice 1

Le nombre N d'enfants d'une famille d'une population bien définie suit la loi de Poisson de paramètre m. Chaque enfant présente à la naissance la probabilité p d'avoir un caractère génétique bien défini, et ceci de façon indépendante. Soit X le nombre d'enfants d'une famille présentant ce caractère et Y le nombre d'entants ne le présentant pas.

1. Quelle relation existe-t-il entre N, X, Y ?
2. Pour n dans $\mathbb{N}$ et k dans $[\![0,n]\!]$, déterminer $P_{N=n}(X=k)$. En déduire la loi de probabilité de X. Que remarque-t-on ?
3. Déterminer la loi de probabilité de Y.
4. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 2

Soient a et b deux réels tels que $0<a<1$ et $0<b<1$.
On effectue une suite d'expérience aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne "pile" est a, et que la probabilité que la pièce B donne "pile" est b.
Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne "face" pour la première fois, et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne "face" pour la première fois.

1. Quelles sont les lois de probabilités de X et de Y ? Calculer $E(X)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X=Y)$. Interprétation.
3. Trouver, pour $k\in\mathbb{N}$, la valeur de $P(X>k)$.
   En déduire les probabilités $P(X>Y)$ et $P(X\geqslant Y)$. Interprétation.

Exercice 3

Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p\in]0,1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 1-ère boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2-ième boule blanche.
   Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.

Programme de Colle 30

Lois discrètes usuelles

- Loi géométrique (Définition, espérance, variance, exemple caractéristique)
- Loi de Poisson (Définition, espérance, variance, somme)

Couples de variables aléatoires

- Définition, loi conjointe, lois marginales
- loi et espérance d'une fonction de couple
- Indépendance (définition, espérance et variance)

Révisions : Bijection : points méthodes

Exercices possibles
Exercices 1 à 3 semaine 29

Exercice 1

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par

$X\backslash Y$	0	1	2
0	1/20	1/4	0
1	17/60	1/4	1/6

1. Déterminer les lois marginales.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(X)$, $E(Y)$.

Exercice 2

On considère une urne contenant quatre boules rouges et trois boules noires.
On pioche une à une sans remise les boules de l'urne.
Pour tout entier $i \in [\![1, 2]\!]$, on note X_i le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la $i^{ème}$ boule noire.

1. Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
2. Expliciter la loi conjointe de (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
3. On note T la variable aléatoire définie par $T = X_2 - X_1$. Que représente T ? Donner son espérance.
4. Donner la loi conjointe de (T, X_1) puis la loi de T.

Exercice 3

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par

$X\backslash Y$	-1	0	1
0	1/4	a	1/8
1	1/5	b	1/10

1. Donner les lois de X et Y.
2. Déterminer a et b de manière que X et Y soient indépendantes.
3. Quelles seraient alors les lois conditionnelles de X pour les différentes valeurs de Y ?

Exercice 4

n boîtes sont numérotées de 1 à n La boîte $n°k$ contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Préciser $E(X)$ et $V(X)$.
2. Etablir la loi du couple (X, Y).
3. En déduire la loi de Y. Calculer $E(Y)$.