

CHAPITRE 2

RÉSOLUTION DES GRANDS SYSTÈMES LINÉAIRES CREUX

De très nombreux phénomènes physiques sont régis par une loi de diffusion : répartition de température, concentration de produits chimiques, potentiel électrique, ... Dans tous les cas, on cherche à discrétiser les équations et à résoudre numériquement les équations mises en jeu. Pour des soucis de précision, de stabilité, de pertinence des résultats, on est amené à résoudre des systèmes linéaires ou non linéaires de grandes tailles.

Voici deux exemples.

2.1. Exemple 1. Equation de la chaleur

La distribution de la température $u(x, y)$ au point (x, y) d'une plaque dont les côtés ont une température imposée $u = 0$ sur le bord et qui reçoit un apport calorifique extérieur de densité f est modélisée par une équation aux dérivées partielles. Soit $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ désignant la plaque, la température vérifie

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y) \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

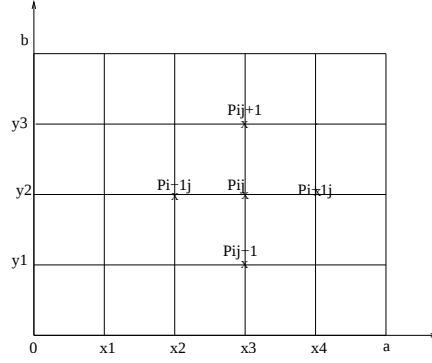
Même si on sait qu'il existe une unique solution de ce problème, la solution de ce problème n'est pas connue analytiquement en général. On procède alors à une approximation pour se ramener à un problème à un nombre fini d'inconnus (processus de discrétisation). On introduit donc un maillage de pas h_1 dans la direction x et h_2 dans la direction y . Pour fixer les idées, on prend ici $h_1 = h_2 = h$ (voir figure 1).

Les noeuds du maillage sont les points $P_{i,j} = (x_i, y_j)$ là où la solution est approchée. On note

$x_i = ih, 0 \leq i \leq N + 1$ les sommets du maillage dans la direction x

$y_j = jh, 0 \leq j \leq M + 1$ les sommets du maillage dans la direction y

On cherche une approximation de l'équation aux noeuds du maillage ($P_{ij}, 1 \leq i \leq$

FIGURE 1. Exemple de maillage pour $N = 4$, $M = 3$

N , $1 \leq j \leq M$. Le principe de la méthode des différences finies consiste à approcher les dérivées d'une fonction par des combinaisons linéaires des valeurs de cette fonction aux points du maillage. On va décrire tout d'abord ce principe en dimension un d'espace.

Dimension 1. On s'intéresse à l'approximation de l'équation

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < a \\ u(0) = \alpha, & u(a) = \beta \end{cases} \quad (2.4)$$

par un schéma aux différences finies sur un maillage à pas fixe $h = \frac{a}{N+1}$

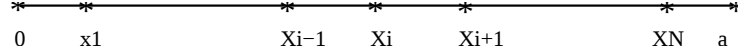


FIGURE 2. Exemple de maillage 1D.

On écrit la formule de Taylor sur un point générique x_i , on a

$$-u''(x_i) = \frac{1}{h^2} \left(-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1}) \right) + 0(h^2) = f(x_i), \quad i = 1 \dots N.$$

On note par u_i une approximation de la solution exacte au point $u(x_i)$, et la méthode aux différences finies s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i, & i = 1, N. \\ u_0 = u(0) = \alpha \\ u_{N+1} = u(a) = \beta \end{cases} \quad (2.5)$$

Le système linéaire (2.5) s'écrit $A_1 U = F$, où $A_1 \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ et $U, F \in \mathbb{R}^N$:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 \dots & 0 \\ 0 \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{\alpha}{h^2} \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{\beta}{h^2} \end{pmatrix}.$$

En dimension 2. On discrétise chaque dérivée selon sa propre direction, ainsi en appliquant la formule de Taylor dans les directions x et y , on a

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_{i,j}) = \frac{-u(P_{i-1,j}) + 2u(P_{i,j}) - u(P_{i+1,j}))}{h^2} + 0(h^2)$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_{i,j}) = \frac{-u(P_{i,j-1}) + 2u(P_{i,j}) - u(P_{i,j+1}))}{h^2} + 0(h^2).$$

En résumé, on notant $u_{i,j}$ une approximation de la solution de (2.3) au point $P_{i,j}$, la discrétisation par différences finies se ramène à la résolution du système linéaire

$$\frac{1}{h^2}(-u_{i-1,j} + 2u_{i,j} - u_{i+1,j}) + \frac{1}{h^2}(-u_{i,j-1} + 2u_{i,j} - u_{i,j+1}) = f_{i,j}; 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M \quad (2.6)$$

$$u_{i,0} = u_{i,M+1} = u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M. \quad (2.7)$$

C'est un système linéaire et on aimerait pour le résoudre pouvoir l'écrire sous la forme matricielle

$$AU = F$$

avec $A \in M_{r \times r}(\mathbb{R})$, $U, F \in \mathbb{R}^r$ et $r = N \times M$. Cela veut dire que nous devons ranger les inconnus $u_{i,j}$, les points intérieurs au domaine, dans un vecteur U de dimension $r = N \times M$, ceci conduit à numéroter les points du maillage.

Numérotation des points du maillage. Il y a plusieurs façons pour numéroter les sommets du maillage, par exemple on peut numéroter les sommets de gauche à droite et de bas en haut (voir figure 3), ou considérer une numérotation selon les diagonales, numérotation zèbre, numérotation échiquier ... (voir TD) Dans l'exemple de la figure 3, on a $N = 4$,

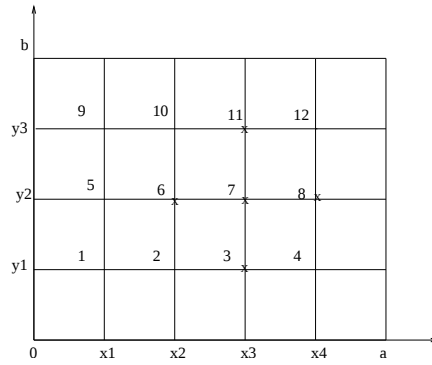


FIGURE 3. Numérotation des sommets de gauche à droite et de bas en haut.

$M = 3$ et $r = 12$, le sommet $m = 7$ correspond au point $P_{3,2} = (x_3, y_2)$ et le sommet

$m = 11$ correspond au point $P_{3,3} = (x_3, y_3)$. On vérifie alors que la numérotation globale pour $m = 1, r$ correspond alors aux points $P_{i,j}$ avec

$$m = i + (j - 1)N, \text{ pour } i = 1, N, j = 1, M.$$

On peut écrire dans ce cas les équations du système linéaire

$$\text{Eq. 1 : } 4u_1 - u_2 - u_5 = h^2 f_1$$

$$\text{Eq. 2 : } 4u_2 - u_1 - u_3 - u_6 = h^2 f_2$$

...

$$\text{Eq. 7 : } 4u_7 - u_3 - u_6 - u_8 - u_{11} = h^2 f_7$$

...

ce qui correspond à l'écriture matricielle suivante

$$\frac{1}{h^2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

cas général :

On peut également écrire les matrices associées à différentes numérotations. En tout cas, il est clair que la numérotation influence considérablement la structure de la matrice A . La matrice A est creuse dans le sens où elle contient beaucoup de zéro. En effet, pour tous N et M , chaque ligne de la matrice A contient au plus cinq éléments non nuls.

2.2. Exemple 2. Problèmes de réseaux.

Soit un réseau fermé de noeuds P_i et d'arêtes $E_{i,j}$ reliant les noeuds P_i et P_j . C'est le cas de canalisations d'eau, de lignes électriques ...

A chaque noeud est associé un potentiel u_i . Dans chaque arête circule un fluide dont l'intensité (ou le débit) est proportionnel à la différence des potentiels $q_{i,j} = k_{i,j}(u_i - u_j)$. Le

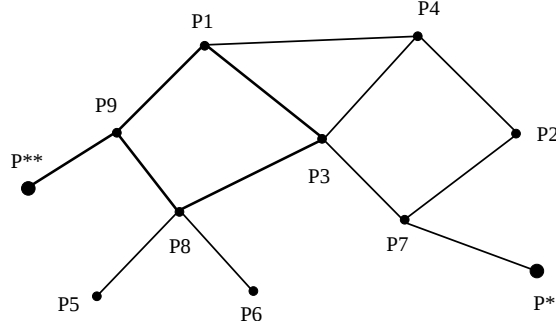


FIGURE 4. Réseau de canalisation

réseau est alimenté à partir de noeuds sources. La loi de conservation impose que le débit total est nul si le noeud est isolé (à l'intérieur du réseau), ce qui se traduit par l'équation suivante

$$\sum_{j \in V(i)} q_{ij} = \sum_{j \in V(i)} k_{i,j}(u_i - u_j) = 0 \quad (2.8)$$

$$u = u^* \text{ donné sur les noeuds sources } P^*, P^{**} \quad (2.9)$$

avec

$$V(i) = \text{ensemble des voisins du noeud } P_i.$$

A titre d'exemple, $V(4) = \{1, 3, 2\}$ et $V(7) = \{3, 2, P^*\}$. Le système (2.8) est linéaire. Pour alléger les notations, on prend ici $k_{i,j} = 1$, les équations du système linéaire sont :

$$\text{Eq. 1 : } (u_1 - u_9) + (u_1 - u_4) + (u_1 - u_3) = 3u_1 - u_9 - u_3 - u_4 = 0$$

$$\text{Eq. 2 : } 2u_2 - u_4 - u_7 = 0$$

...

$$\text{Eq. 7 : } u_7 - u_3 + u_7 - u^* = 0 \implies 2u_7 - u_3 = u^*$$

...

ensuite, il est aisé d'écrire ce système sous la forme $AU = F$. Noter que ce système est creux parce que un noeud dépend uniquement de ses voisins.

2.3. Graphe associé à une matrice et inversement

La numérotation des sommets d'un maillage ou d'un réseau modifie considérablement la structure creuse de la matrice associée. Il y a des techniques de renumérotation permettant de réduire la largeur de la bande ou du profil de la matrice. Ces techniques sont basées sur la notion de graphe.

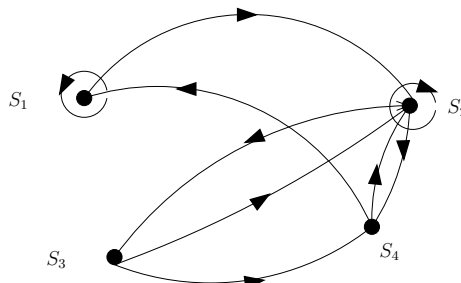
Soit A une matrice carrée, $A = (a_{ij})$ d'ordre N . A chaque colonne de la matrice on fait correspondre un sommet S_i , $i = 1, N$.

Un **arc** relie S_i à S_j si $a_{ij} \neq 0$.

Un **graphe** est formé de l'ensemble des sommets et de arcs.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



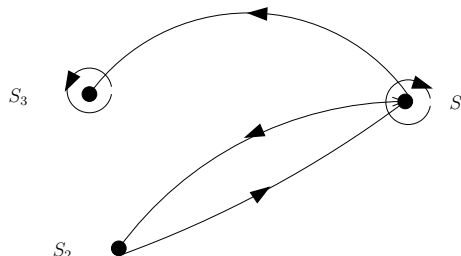
A chaque sommet, on peut associer l'ensemble de voisins :

$$V(S_i) = \{S_j, j \neq i, S_i S_j \text{ est un arc}\}$$

Un **chemin** allant de S_i à S_j est une suite d'arcs, si elle existe, telle que (S_i, S_{i_1}) , $(S_{i_1}, S_{i_2}) \dots (S_{i_p}, S_j)$ soient des arcs du graphe.

Un graphe est dit **fortement connexe** s'il existe au moins un chemin allant de tout sommet S_i à tout sommet S_j . Ainsi le graphe précédent est fortement connexe. Par contre, pour la matrice suivante

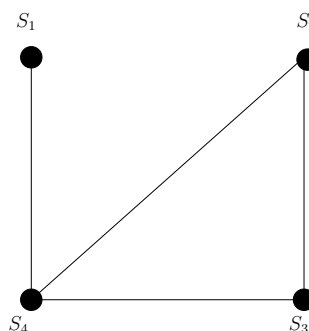
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



le graphe n'est pas fortement connexe car il n'y a pas de chemin allant de S_3 à S_1 .

Lorsque la matrice est symétrique ($a_{ij} \neq 0$ ssi $a_{ji} \neq 0$) on définit l'**arête** comme étant l'ensemble des deux arcs.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$



2.6. Méthodes directes pour la résolution de systèmes linéaires

On a vu que la discrétisation de systèmes modélisant des phénomènes physiques donne lieu à un système linéaire de grande taille et creux (la matrice contient beaucoup de zéro). Par exemple, pour une matrice tridiagonale de taille N , le nombre de coefficients non nuls est $3N$ à comparer avec N^2 le nombre des coefficients d'une matrice pleine ; pour $N = 3000$, il est facile de voir que 0.1% des coefficients sont utiles pour résoudre le système linéaire. Il est alors judicieux que le stockage de la matrice soit bien adapté à la structure de la matrice. Le seul critère pour résoudre un système linéaire de grande taille est la rapidité et la précision de la méthode utilisée. Ceci passe par une méthode de résolution adaptée à la nature et la structure de la matrice.

2.6.1. Méthode de Cramer. — La méthode de Gramer consiste à résoudre le système linéaire $Ax = b$ par la formule $x_i = \det A_i / \det A$, avec x_i est la i ème composante du vecteur x et A_i est la matrice A où la i ème colonne est remplacée par b .

La complexité de cette méthode c'est à dire le nombre d'opérations nécessaire pour calculer la solution est :

- N divisions
- $(N + 1)$ déterminants à calculer
- $N N!$ opérations pour calculer un déterminant

ainsi, la complexité vaut $(N + 1)N! + N$. A titre d'exemple, pour $N = 25$ la complexité est de l'ordre de 4×10^{26} opérations. Considérons maintenant un ordinateur avec 1G de ram c'est à dire qu'il effectue 10^9 opérations par seconde. Ensuite, calculons le nombre d'opérations que cet ordinateur effectue par milliard d'années :

$$10^9(\text{opérations/secondes}) \times 3600(\text{secondes/heure}) \times 24(\text{heures/jour}) \\ \times 352(\text{jours/an}) \times 10^9(\text{an/milliard}) = 3 \times 10^{25}$$

et enfin le temps qu'il met cet ordinateur pour résoudre un système linéaire de taille 25×25 par la méthode de Cramer est

$$\frac{4 \times 10^{16}}{3 \times 10^{25}} > 10 \text{ milliards d'années}$$

ce qui est plus grand que l'âge de la terre !.

Inversion d'une matrice. Résoudre $Ax = b$ est équivalent à $x = A^{-1}b$, mais le coût pour calculer l'inverse d'une matrice par la formule $A^{-1} = {}^t Co(A) / \det A$ est aussi de l'ordre de $(N + 1)N!$. Ce que nous voulons est la résolution du système linéaire sans calculer l'inverse de cette matrice parce que dans tous les cas le calcul de A^{-1} est très coûteux.

Une méthode simple pour calculer l'inverse d'une matrice est de résoudre N systèmes linéaires. On note c_j les vecteurs colonnes de la matrice A^{-1} et A^{-1} est solution de $AA^{-1} = I$ ceci est équivalent à $Ac_j = e_j$ avec $(e_j)_j$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

2.6.2. Méthode de Gauss. — La méthode de base la plus utilisée pour la résolution des systèmes linéaires est la méthode d'élimination de Gauss. La méthode de Gauss consiste à déterminer une matrice P telle que le système équivalent $PAx = Pb$ soit triangulaire supérieure et donc simple à résoudre.

• La résolution d'un système triangulaire supérieure est aisée par la *procédure de remontée*. Soit le système $Uy = b$ avec

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & & \cdots & \\ & & & u_{ii} & u_{i,i+1} & u_{i,n} \\ & & & & \cdots & \\ & & & & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ & & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

l'algorithme de la remontée consiste à résoudre le système en commençant par la dernière équation :

$$\begin{aligned} u_{n,n}y_n &= f_n \implies y_n = \frac{f_n}{u_{nn}} \\ u_{n-1,n-1}y_{n-1} + u_{n-1,n}y_n &= f_{n-1} \implies y_{n-1} = \frac{f_{n-1} - u_{n-1,n}y_n}{u_{n-1,n-1}} \\ u_{ii}y_i + \sum_{j=i+1}^N u_{ij}y_j &= f_i \implies y_i = \frac{f_i - \sum_{j=i+1}^N u_{ij}y_j}{u_{ii}}, \text{ pour } i = N, 1 \end{aligned}$$

Algorithme.

```
Pour i=n à 1 par pas de -1 faire
  s=f(i)
  pour j=i+1 à n faire
    s=s-u(i,j)*y(j)
  finj
  y(i)=s/u(i,i)
fini
```

Calculer la complexité de cet algorithme.

- Exemple d'élimination de la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ \frac{17}{2} \\ 8 \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent à résoudre :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0 = 9 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 0 + \frac{1}{2}x_4 = 2 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 4x_3 + x_4 = \frac{17}{2} \\ 0 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

La méthode d'élimination de Gauss se fait en 3 étapes sur cet exemple.

Etape 1. Elimination de x_1 dans les trois dernières lignes $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{4}L_1$ (i.e. L_2 est remplacé par $L_2 - \frac{1}{4}L_1$) et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{4}L_1$. Le coefficient $a_{11} = 4$ est appelé le pivot ; ce qui donne

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0 = 9 \\ 0 + 0 + -\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{4} \\ 0 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + x_4 = 4 \\ 0 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

Etape 2. Elimination de x_2 . On décrit ici la méthode sans faire de combinaison maligne des équations. Ici, il y a un problème car le pivot a_{22} est nul. On échange alors les lignes L_4 et L_2 , ainsi :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0 = 9 \\ 0 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \\ 0 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + x_4 = 4 \\ 0 + 0 + -\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

et maintenant, on effectue l'opération : $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0 = 9 \\ 0 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \\ 0 + 0 + \frac{9}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 2 \\ 0 + 0 + -\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Etape 3. $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3}L_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0 = 9 \\ 0 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \\ 0 + 0 + \frac{9}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 2 \\ 0 + 0 + 0 + \frac{5}{12}x_4 = \frac{5}{12} \end{array} \right.$$

et une résolution directe de ce système par l'algorithme de remontée donne $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Algorithme général.

2.6.3. Méthode de Cholesky. — voir TD.

3.1. Méthodes itératives classiques

3.1.1. Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation. — Soit A une matrice d'ordre n telle que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, n$. On décompose A sous la forme

$$A = D - E - F$$

avec

D la diagonale de A

$-E$ la partie inférieure stricte

$-F$ la partie supérieure stricte.

- **Méthode de Jacobi.** Résoudre $Ax = b$ est équivalent à

$$Dx = (E + F)x + b.$$

La méthode de Jacobi est basée sur la décomposition précédente et elle s'écrit

$$\left\| \begin{array}{l} x_0 \text{ arbitraire} \\ Dx_{k+1} = (E + F)x_k + b \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Il est facile à chaque itération de calculer x_{k+1} en fonction de x_k car la matrice diagonale D est inversible. Les composantes du vecteur x_{k+1} vérifient

$$a_{ii}(x_{k+1})_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}(x_k)_j + b_i,$$

soit encore

$$(x_{k+1})_i = \left(- \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}(x_k)_j + b_i \right) / a_{ii}.$$

Sous forme matricielle x_{k+1} s'écrit

$$x_{k+1} = D^{-1}(E + F)x_k + D^{-1}b = Jx_k + c, \quad (3.3)$$

la matrice $J = D^{-1}(E + F)$ est la matrice d'itération de Jacobi. ~~La méthode de Jacobi converge ssi $\rho(J) < 1$.~~

Pour programmer cette méthode, on a besoin de stocker les vecteurs x_k et x_{k+1} .

- **Méthode de Gauss-Seidel.** Elle est basée sur cette décomposition :

$$Ax = b \iff (D - E)x = Fx + b$$

la méthode de Gauss-Seidel s'écrit

$$\left\| \begin{array}{l} x_0 \text{ arbitraire} \\ (D - E)x_{k+1} = Fx_k + b \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$D - E$ est une matrice triangulaire inférieure et pour calculer x_{k+1} en fonction de x_k , il suffit d'appliquer l'algorithme de descente suivant :

pour $i = 1, n$

$$a_{ii}(x_{k+1})_i = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(x_{k+1})_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}(x_k)_j + b_i,$$

soit encore

$$(x_{k+1})_i = \left(- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(x_{k+1})_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}(x_k)_j + b_i \right) / a_{ii}.$$

Noter que dans la boucle de calcul, les composantes du vecteur $(x_{k+1})_j$ pour $j = 1, i - 1$ sont déjà calculés et on peut utiliser un seul vecteur pour programmer cette méthode. Sous forme matricielle x_{k+1} s'écrit

$$x_{k+1} = (D - E)^{-1} F x_k + (D - E)^{-1} b = G x_k + c, \quad (3.5)$$

la matrice $G = (D - E)^{-1} F$ est la matrice d'itération de Gauss-Seidel. ~~La méthode de Gauss-Seidel converge ssi $\rho(G) < 1$.~~

• **Méthode de relaxation.** Elle est basée sur cette décomposition : Soit $\omega \neq 0$, la matrice A s'écrit $A = (\frac{D}{\omega} - E) + (D - \frac{D}{\omega} - F)$. Le système $Ax = b$ s'écrit $(\frac{D}{\omega} - E)x = (\frac{1-\omega}{\omega} D + F)x + b$. La méthode de relaxation s'écrit :

$$\left\| \begin{array}{l} x_0 \text{ arbitraire} \\ (\frac{D}{\omega} - E)x_{k+1} = (\frac{1-\omega}{\omega} D + F)x_k + b \end{array} \right. \quad (3.6)$$

soit encore

$$(D - \omega E)x_{k+1} = ((1 - \omega)D + \omega F)x_k + \omega b,$$

La matrice d'itération s'écrit alors

$$\mathcal{L}_\omega = (D - \omega E)^{-1}((1 - \omega)D + \omega F).$$

Les composantes du vecteur x_{k+1} sont solutions de

$$\left\| \begin{array}{l} a_{ii}(x_{k+\frac{1}{2}})_i = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(x_{k+1})_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}(x_k)_j + b_i \\ (x_{k+1})_i = (x_k)_i + \omega((x_{k+\frac{1}{2}})_i - (x_k)_i). \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Pour $\omega = 1$, c'est la méthode de Gauss-Seidel.

Théorème 3.2. —

- ~~1. Soit A une matrice symétrique définie positive (ou hermitienne définie positive), alors la méthode de relaxation converge si $0 < \omega < 2$.~~
2. Soit A une matrice à diagonale strictement dominante ou à diagonale fortement dominante et irréductible) alors la méthode de Jacobi converge et la méthode de relaxation converge pour $0 < \omega \leq 1$.