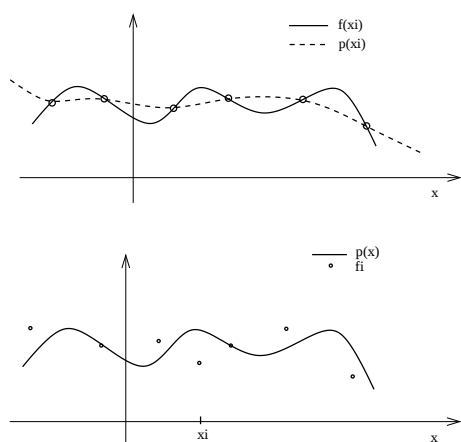


CHAPITRE 4

INTERPOLATION ET APPROXIMATION

4.1. Introduction

• On se donne un ensemble de points (x_i, f_i) obtenus suite à une mesure expérimentale (f_i représente la température, pression, débit,) pour connaître la valeur de la fonction mesurée en d'autres points dans le domaine, on peut alors représenter la fonction f par un polynôme.



On cherche P un polynôme tel que $P(x_i) = f(x_i)$. Un tel polynôme interpole la fonction mesurée aux points des mesures x_i

On cherche P un polynôme le plus proche des valeurs mesurées. L'approximation au sens des moindres carrés consiste à p tel que

$$\sum_i |p(x_i) - f_i|^2 \text{ soit minimal.}$$

• On cherche à calculer une intégrale dont on ne connaît pas explicitement sa valeur. Par exemple, on approche cette comme suit

$$f(x) \approx p(x) \text{ et } \int f(x) dx \approx \int p(x) dx \text{ (facile à calculer)}$$

ce qui conduit à l'intégration numérique.

- f solution d'une e.d.o
- f solution d'une équation non linéaire de la forme $f = G(f)$
- Soit f une fonction inconnue solution d'un problème aux limites (équation de la chaleur par exemple), on cherche à approcher au mieux les valeurs de f en certains points du domaine.

4.2. Interpolation de Lagrange

Soient $(n + 1)$ couples : $(x_0, f_0), (x_1, f_1) \dots (x_n, f_n)$, tels que les x_i sont distincts. On cherche un polynôme P tel que

$$P(x_i) = f_i \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

Le polynôme passe par les points de mesure.

Théorème 4.1. — *Il existe un unique $P \in \mathbb{P}_n = \{ \text{polynômes de degrés } n \}$ tel que*

$$P(x_i) = f_i \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

Démonstration. —

Unicité. Soient $p, q \in \mathbb{P}_n$ tels que $P(x_i) = Q(x_i) = f_i$ pour $i = 0, \dots, n$, alors $p - q \in \mathbb{P}_n$ et il s'annule en $(n + 1)$ points distincts alors $p - q \equiv 0$.

Existence. Base de polynômes de Lagrange.

Soit

$$L_i \in \mathbb{P}_n \text{ tel que } L_i(x_j) = \delta_{ij}, i = 0, \dots, n,$$

alors $\{L_i\}_{i=0,n}$ est une base de $\mathbb{P}_n$ (famille libre).

Construction de $L_i(x)$. On a $L_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$ donc $x - x_j$ divise le polynôme

$$L_i(x) = \lambda \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) \in \mathbb{P}_n \implies \lambda \in \mathbb{R},$$

λ est calculé par $L_i(x_i) = 1$ ce qui donne $\lambda = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}$. Les polynômes de Lagrange sont

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, i = 0, n. \quad (4.1)$$

□

Théorème 4.2. — *(Erreur d'interpolation de Lagrange)*

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ et $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$. Soit p le polynôme de Lagrange défini par

$$p(x_i) = f(x_i) \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

Alors

$$f(x) - p(x) = \frac{L(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (4.2)$$

avec $L(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$, $a \leq \min(x_0, x) < \xi < \max(x, x_n) \leq b$.

Démonstration. — Si $x = x_i$ alors $f(x_i) = p(x_i)$ et $L(x) = 0$ ce qui établit (4.2).
soit $x \neq x_i$, $i = 0, n$. Considérons la fonction w définie par :

$$w(t) = f(t) - p(t) - L(t)k(x)$$

avec la fonction $k(x)$ est donnée tel que $w(x) = 0$, soit encore $k(x) = \frac{f(x)-p(x)}{L(x)}$. On a

$$w(x) = 0, w(x_i) = 0, i = 0, n$$

w s'annule en $(n+2)$ points distincts et d'après le théorème de Rolle

w' s'annule en $(n+1)$ points distincts, et donc

w'' s'annule en n points distincts, ...

$w^{(n+1)}$ s'annule en 1 point ; Il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $w^{(n+1)}(\xi) = 0$.

$$w^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - p^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!k(x) = 0$$

or $p^{(n+1)}(\xi) = 0$ car $p \in \mathbb{P}_n$, ce qui donne

$$k(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f(x) - p(x)}{L(x)}$$

ce qui établit (4.2). □

En majorant l'erreur d'interpolation, on a

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \max_{x \in [a, b]} |L(x)|. \quad (4.3)$$

L'erreur d'interpolation résulte de deux termes : le premier terme $\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ dépend de f et on ne peut pas l'améliorer car f est donnée, par contre le deuxième terme $\max_{x \in [a, b]} |L(x)|$ dépend de la distribution des points x_i . On peut choisir l'ensemble des points $\{x_i\}_{i=0, n}$ pour que l'erreur $\max_{x \in [a, b]} |L(x)|$ soit minimal.

4.2.1. Meilleur choix des points x_i . — Le polynôme $L(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n+1})$ est un polynôme de degré $(n+1)$ dont le coefficient de x^{n+1} est 1. Le meilleur choix de $\{x_i\}_{i=0, n}$ est alors les racines du polynôme $L(x)$ vérifiant

$$\max_{x \in [a, b]} |L(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |q(x)|, \quad \forall q \in \mathbb{P}_{n+1} \text{ et } q(x) = x^{n+1} + a_n x^n + \dots \quad (4.4)$$

Nous allons voir que les polynômes de Tchebychev répondent à cette question. Les polynômes de Tchebychev sont définis par

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1], n \geq 0.$$

Vérifions d'abord que $T_n(x) \in \mathbb{P}_n$. On a $T_0 = \cos(0) = 1$ et $T_1(x) = x$ et on a la relation de récurrence

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1} = 2^n x^{n+1} + \dots$$

car en posant $\theta = \text{Arccos}(x)$

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \frac{1}{2}(\cos((n-1)\theta) - \cos((n+1)\theta)) = xT_n(x) - \frac{1}{2}(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Les racines de T_n sont : $T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = 0$, alors $n \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ainsi $\arccos(x) = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$ pour $k = 0 \cdots n-1$, ce qui donne que les racines de T_n sont :

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right); k = 0 \cdots n-1.$$

Les extremas de T_n sont : $T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = \pm 1$, alors $\arccos(x) = \frac{k\pi}{n}$ ce qui donne les extremas :

$$y_k = \cos \frac{k\pi}{n}; \quad T_n(y_k) = (-1)^k, k = 0 \cdots n.$$

Théorème 4.3. — *Les racines des polynômes de Tchebychev satisfont*

$$\max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |q(x)|, \quad \forall q \in \mathbb{P}_n \text{ et } q(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots \quad (4.5)$$

Démonstration. — On va montrer ce résultat par l'absurde. Soit $q(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots \neq T_n(x)$ et on suppose

$$\max_{x \in [-1,1]} |q(x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)|. \quad (4.6)$$

Sur chaque intervalle $[\cos(\frac{k\pi}{n}), \cos(\frac{(k+1)\pi}{n})]$, $k = 0 \cdots n-1$, T_n passe du maximum au minimum ou inversement. On pose $d(x) = q(x) - T_n(x) \neq 0$, et donc $d \in \mathbb{P}_{n-1}$. De plus q est continue et vérifie la relation 4.6, alors sur chaque intervalle $[\cos(\frac{k\pi}{n}), \cos(\frac{(k+1)\pi}{n})]$, le graphe de q intersecte au moins une fois le graphe de T_n , c'est à dire $d(x)$ s'annule au moins une fois dans cet intervalle. Alors le polynôme d s'annule n fois et comme d est un polynôme de degré $(n-1)$ alors $d = 0$, ce qui contredit que $d \neq 0$. $\square$

Ainsi, on a montré que parmi tous les polynômes de degré n s'écrivant sous la forme $q(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$, le polynôme de Tchenychev est celui qui réalise le minimum pour la norme infinie, c'est à dire

$$\|T_n\|_{C^0[-1,1]} < \|q\|_{C^0[-1,1]}, \forall q \in \mathbb{P}_n, q(x) = 2^{n-1}x^n + \dots.$$

Autrement dit,

$$\max_{x \in [-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n)| \text{ est minimal}$$

si et seulement si

$$T_{n+1}(x) = 2^n(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n) \text{ avec } x_k = \left(\cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right); k = 0 \cdots n.$$

Ou encore,

pour toute distribution de points d'interpolation $(z_0, z_1, \dots, z_n)$, alors

$$\max_{x \in [-1, 1]} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} |(x - z_0)(x - z_1) \cdots (x - z_n)|,$$

où les x_k sont les racines de T_{n+1} .

Enfin, sur un intervalle quelconque $[a, b]$, les racines du polynôme de Tchebychev sont définies comme suit

$$\hat{T}_n : [a, b] \xrightarrow{\phi} [-1, 1] \xrightarrow{T_n} \mathbb{R}$$

$$\text{où } \phi(x) = \frac{2x}{b-a} - \frac{b+a}{b-a}.$$

Les polynômes de Tchebychev sur un intervalle quelconque $[a, b]$ s'écrivent :

$$\hat{T}_n = (T_n \circ \phi)(x) = T_n(\phi(x)) = \cos(n \arccos \phi(x))$$

et leurs racines sont : $\phi(x_k) = (\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n})$; $k = 0 \cdots n-1$ et donc $\phi(x_k) = \frac{2x_k}{b-a} - \frac{b+a}{b-a} = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$, ainsi $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$, pour $k = 0 \cdots n-1$.

Remarque 4.1. — *i) On a $T_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + \cdots = 2^n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ et comme $\max_{x \in [-1, 1]} |T_{n+1}(x)| = 1$ et donc $\max_{x \in [-1, 1]} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| = \frac{1}{2^n}$, ainsi l'erreur d'interpolation s'écrit :*

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{2^n} \max_{x \in [-1, 1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

ii) Les racines de Tchebychev, elles sont plus denses aux extrémités. Cette distribution a pour effet de réduire le phénomène de Runge (les effets sur le bord).

Exemple (TP) : comparer pour $f(x) = e^{-x^2}$ sur $[-5, 5]$ en prenant 10 points équidistants et les 10 racines de $T_{10}(x)$.

4.3. Polynôme d'interpolation de Newton

Une autre façon de construire $p \in \mathbb{P}_n$ tel que $p(x_i) = f_i$ est d'utiliser la formule de Taylor et d'introduire les différences divisées.

En effet, par la formule de Taylor, on écrit

$$p(x) = p(x_0) + (x - x_0)Q_0(x) \text{ avec } Q_0 \in \mathbb{P}_{n-1},$$

or $p(x_0) = f_0$ ainsi

$$p(x) = f_0 + (x - x_0)Q_0(x),$$

Ensuite pour que $p(x_1) = f_1$, alors $Q_0(x_1) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ est connu. On applique à nouveau la formule de Taylor à $Q_0(x)$

$$Q_0(x) = Q_0(x_1) + (x - x_1)Q_1(x) \text{ avec } Q_1 \in \mathbb{P}_{n-2},$$

soit encore

$$p(x) = f_0 + (x - x_0)Q_0(x_1) + (x - x_0)(x - x_1)Q_1(x),$$

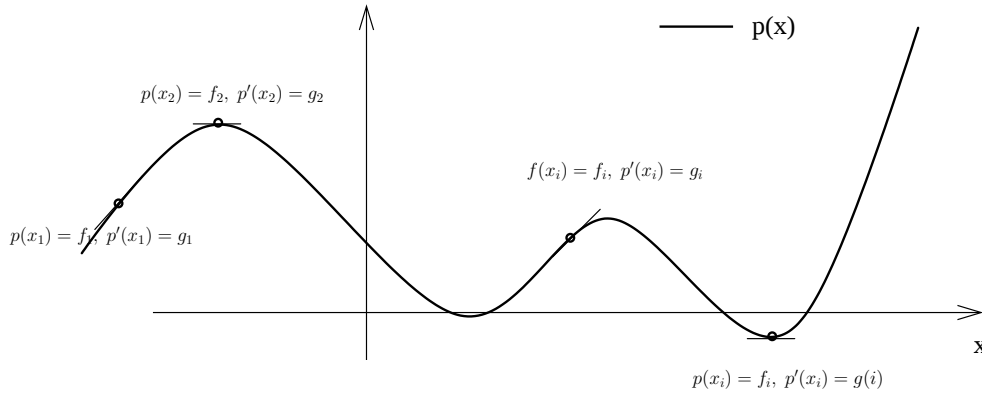


FIGURE 1. Interpolation de Hermite

Pour assurer $p(x_2) = f_2$, on impose alors

$$Q_1(x_2) = \frac{f_2 - f_0 - (x_2 - x_0)Q_0(x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

on continue le procédé en faisant le développement de Taylor de $Q_1(x)$ au point x_2 . Les $Q_i(x_{i+1})$ sont appelés les différences divisées.

4.4. Interpolation de Hermite

On cherche un polynôme qui interpole la fonction f ainsi que sa dérivée aux points donnés. précisément, soient les $(n + 1)$ triplet (x_i, f_i, g_i) pour $i = 0, n$. On cherche un polynôme p tel que

$$\begin{cases} p(x_i) = f_i, & i = 0, n \\ p'(x_i) = g_i, & i = 0, n \end{cases} \quad (4.7)$$

Théorème 4.4. — Il existe un unique $P \in \mathbb{P}_{2n+1} = \{ \text{polynômes de degrés } 2n+1 \}$ satisfaisant (4.7).

Démonstration. —

Unicité. Soient $p, q \in \mathbb{P}_{2n+1}$ tels que $p(x_i) = q(x_i) = f_i$ et $p'(x_i) = q'(x_i) = g_i$ pour $i = 0, \dots, n$, alors $r = p - q \in \mathbb{P}_{2n+1}$ et $r(x_i) = r'(x_i) = 0$, alors $(x - x_i)^2$ divise le polynôme r , ainsi $r = c(x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2 \in \mathbb{P}_{2(n+1)}$, or $r \in \mathbb{P}_{2n+1}$ alors $c = 0$ et $r \equiv 0$.

Existence. Base de polynômes de Hermite.

On cherche une base de polynômes de $\mathbb{P}_{2n+1}$ telle que

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n g_i B_i(x)$$

Les conditions sur les fonctions de bases sont alors les suivantes :

$$A_i(x_j) = \delta_{ij}, B_i(x_j) = 0 \text{ pour } i = 0, n$$

$$A'_i(x_j) = 0, B'_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ pour } i = 0, n$$

les premières conditions permettent d'imposer $p(x_i) = f_i$ et les secondes $p'(x_i) = g_i$. Ces conditions permettent de construire les fonctions de bases. En effet,

Construction des polynômes A_i . On a $A_i(x_j) = A'_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$ alors $(x - x_j)^2$ divise A_i pour $j \neq i$, alors $A_i(x) = r(x) \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)^2$ où $r(x) \in \mathcal{P}_{N1}$. On peut exprimer ce polynôme en fonction du polynôme de Lagrange. En effet, $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, ainsi $A_i(x) = q(x)L_i^2(x)$, où $q(x) = ax + b \in P_1$. Les coefficients a et b sont tels que

$$A_i(x_i) = 1 \text{ et } A'_i(x_i) = 0.$$

On a

$$A_i(x_i) = (ax_i + b)L_i^2(x_i) = 1 = ax_i + b \text{ car } L_i(x_i) = 1.$$

$$A_i(x_i) = aL_i^2(x_i) + 2L_i(x_i)L'_i(x_i)(ax_i + b) = a + 2L'_i(x_i)(ax_i + b) = a + 2L'_i(x_i) = 0,$$

ainsi $a = -2L'_i(x_i)$ et $b = 1 - ax_i$, enfin

$$A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i))L_i^2(x_i).$$

Calcul de B_i . Pour $j \neq i$, on a $B_i(x_j) = B'_i(x_j) = 0$, alors L_i^2 divise B_i , d'autre part $B_i(x_i) = 0$, alors $(x - x_i)$ divise aussi B_i . On déduit que $B_i(x) = c(x - x_i)L_i^2(x)$ et $c \in \mathbb{R}$. On détermine la constante par la relation $B'_i(x_i) = 1$; on a

$$B'_i(x_i) = cL_i^2(x_i) + 2c(x_i - x_i)L_i(x_i)L'_i(x_i) = c = 1,$$

ce qui donne

$$B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x).$$

□

Théorème 4.5. — (*Erreur d'interpolation de Hermite*)

Soit $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b])$ et $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$. Soit $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ le polynôme d'interpolation de Hermite définit par

$$\begin{cases} p(x_i) = f(x_i), & i = 0, n \\ p'(x_i) = f'(x_i), & i = 0, n. \end{cases} \quad (4.8)$$

Alors

$$f(x) - p(x) = \frac{L(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi), \quad (4.9)$$

avec $L(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2$, $a \leq \min(x_0, x) < \xi < \max(x, x_n) \leq b$.

La preuve est semblable à celle proposée pour le théorème 4.2.

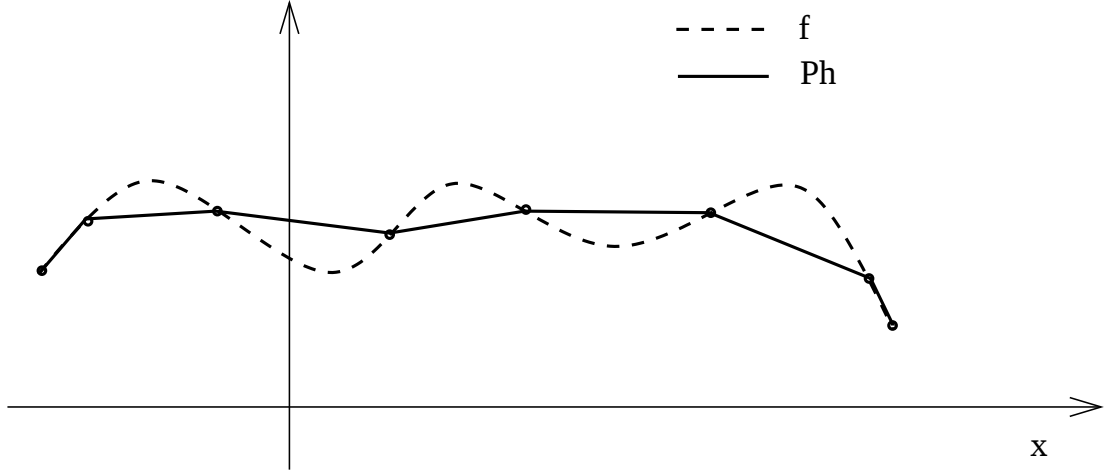


FIGURE 2. Interpolation locale par des $\mathbb{P}_1$ par morceaux(gauche), par des $\mathbb{P}_2$ par morceaux(droite)

4.5. Interpolation locale

Le théorème d'interpolation 4.2 montre que l'approximation d'une fonction par des polynômes nécessite que la fonction soit régulière et le degré du polynôme soit élevé pour avoir la convergence lorsque le degré du polynôme tend vers l'infinie. L'interpolation locale consiste à interpoler la fonction sur des intervalles de petite taille par des polynômes de faible degré. On va décrire cette méthode.

Soit $[a, b]$ un compact de $\mathbb{R}$. On divise l'intervalle $[a, b]$ en M -intervalles de pas $h = (b - a)/M$. On pose $a_i = a + ih$, $i = 0, M$. Ensuite sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ on construit un polynôme d'interpolation $p_i(x)$ de degré m fixe aux points d'interpolation $(x_i)_k = a_i + \frac{kh}{m}$, $k = 0, m$. Les points $(x_i)_k$ sont situés dans l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$.

On considère le polynôme d'interpolation défini par morceaux comme suit

$$q_h(x) = p_i(x), \text{ pour } a_i \leq x \leq a_{i+1}. \quad (4.10)$$

Le polynôme q_h est continue mais non dérivable aux points a_i .

Théorème 4.6. — (*Erreur d'interpolation locale et convergence*)

Soit $f \in \mathcal{C}^{m+1}([a, b])$, alors

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - q_h(x)| \leq \frac{1}{m!} \sup_{x \in [a, b]} |f^{(m+1)}(x)| h^{m+1}. \quad (4.11)$$

Démonstration. — Soit $x \in [a, b]$, il existe $i \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$ tel que $a_i \leq x \leq a_{i+1}$. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange

$$|f(x) - p_i(x)| = |f(x) - q_h(x)| \leq \frac{\Pi_i(x)}{(m+1)!} |f^{(m+1)}(\xi)|, \xi \in]a_i, a_{i+1}[$$

avec

$$\Pi_i(x) = \left| \prod_{k=0}^m (x - (x_i)_k) \right| \leq (m+1)(a_{i+1} - a_i)^{m+1} \leq (m+1)h^{m+1}$$

ce qui établit (4.11). □

Dans le théorème 4.6, l'entier m est fixe (en général $m = 1, 2$ ou 3) et on regarde la convergence par rapport à h quand $h \rightarrow 0$, on a directement

$$|f(x) - q_h(x)| \longrightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$