Devoir Surveillé 12

Le vendredi 5 Juin 2024
14h-16h

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

I désigne, soit l'intervalle $\left]-\infty, 0\right[$, soit l'intervalle $\left]0, +\infty\right[$.

On donne l'équation différentielle

$$(1): \quad x\,y'' + 2\,y' - x\,y = 4\,x\,e^x$$

où y désigne une fonction réelle de la variable x, définie sur I.

1. Pour tout réel $x \in I$, on pose $z(x) = x\ y(x)$.
   Montrer que $x \mapsto y(x)$ est solution de (1) si et seulement si $x \mapsto z(x)$ est solution d'une équation différentielle (2) que l'on précisera.
2. On recherche une solution particulière de (2) sous la forme $x \mapsto z(x) = P(x)\,e^x$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ (polynôme à coefficients réels).
   (a) Montrer que, si P existe, il est forcément de degré 2.
   (b) Donner une solution particulière de (2) sous la forme indiquée.
3. Résoudre sur I l'équation (2), et en déduire toutes les solutions de (1) sur I.
4. *Raccordement des solutions :* Trouver toutes les solutions $x \mapsto y(x)$ de (1) définies sur $\mathbb{R}$. Pour cela on cherchera les solutions qui vérifient :
   — être solution de l'équation (1) sur $\left]-\infty, 0\right[$
   — être solution de l'équation (1) sur $\left]0, +\infty\right[$,
   — être solution de l'équation en x=0,
   — continue en 0
   — deux fois dérivables en 0.

Exercice 2

$\mathbb{C}^*$ désigne l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Par convention : $\forall\, z \in \mathbb{C}^* \quad z^0 = 1$.

On considère l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

1. (a) Discuter, suivant la valeur du complexe u, le <u>nombre</u> d'antécédents de u.

   (b) f est-elle surjective ? f est-elle injective ?

   (c) Soit $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} — |z| = 1\}$ et F l'intervalle réel $[-2\,,\,2]$.

   Montrer que : $f(\mathcal{U}) \subset F$ et que $f(z) \in F \Rightarrow z \in \mathcal{U}$.

   (d) Soit $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} — 0 < |z| < 1\}$.

   Montrer que f induit une application $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C} - F$, et que g est une bijection.

2. Recherche des polynômes P_n tels que $\forall\, z \in \mathbb{C}^* \quad f(z^n) = P_n\big(f(z)\big)$

   (a) Déterminer directement les polynômes P_0, P_1 et P_2.

   (b) Pour $n \geqslant 2$, justifier que le polynôme P_n existe et vérifie

   $$\forall\, n \geqslant 1 \quad P_{n+1}(X) = X\, P_n(X) - P_{n-1}(X)$$

   En déduire l'expression de $P_3(X)$.

   (c) Déterminer le degré de P_n et étudier sa parité.

Exercice 3

BAC C - 1980 Groupe d'applications linéaires dans $\mathbb{R}^3$

Dans une large mesure, les trois parties sont indépendantes

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ muni de l'addition, de la multiplication par un réel, et de la loi $\circ$ a une structure de $\mathbb{R}$-algèbre non commutative et non intègre.

Id désigne l'application identique et $\mathbf{0}$ l'application nulle.

Partie A

Dans cette partie, E est de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

On définit l'endomorphisme f par $\begin{cases} f(i) = +2\,i - j - k \\ f(j) = -i + 2\,j - k \\ f(k) = -i - j + 2\,k \end{cases}$

1. Déterminer l'expression analytique de f. En déduire le noyau et l'image de f (on en donnera la nature et une base ou une équation).

2. Soit Π le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$. Montrer que la restriction de f au plan Π est une homothétie vectorielle dont on précisera le rapport.

   En déduire que $f \circ f = 3\,f$.

   Vérifier ce résultat en utilisant l'expression analytique.

3. (a) Montrer que, si h est une homothétie vectorielle de rapport k $(k \neq 0)$, et p un endomorphisme quelconque de E, alors $h \circ p = p \circ h = k\,p$.

   (b) On pose $\varphi = p \circ h$, où p est une projection vectorielle, et h une homothétie vectorielle de rapport k. Montrer que $\varphi \circ \varphi = k\,\varphi$.

   Énoncer et démontrer la réciproque.

(c) Utiliser ce qui précède pour montrer qu'il existe une projection vectorielle p et une homothétie vectorielle h telles que $f = p \circ h$. On précisera les éléments de p et de h.

4. Pour tout réel m non nul, on note $f_m = m\,f$ et $\mathcal{F} = \{f_m \;—\; m \in \mathbb{R}^*\}$.

   (a) Montrer que $(\mathcal{F}, \circ)$ est un groupe commutatif.
   Préciser l'élément neutre ainsi que le symétrique de f_m.
   L'élément neutre de $\mathcal{F}$ est-il un automorphisme de E ?

   (b) Calculer $(f_m)^2 - 3m\,f_m$ (où $f_m^2 = f_m \circ f_m$).

Partie B

Dans cette partie, E est un espace vectoriel.
a, b, c sont trois réels, $a \neq 0$.
On considère l'équation (1) : $af^2 + bf + c\,\mathrm{Id} = \mathbf{0}$ dans $\mathcal{L}(E)$ (où $f^2 = f \circ f$).

1. Montrer que si $b^2 - 4ac \geqslant 0$, alors il existe au moins un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ solution de (1) (on cherchera une solution sous la forme $\lambda\,\mathrm{Id}$).
2. Montrer que, si $c \neq 0$, toute solution de (1) est un automorphisme de E.
3. On suppose que $b = c = 0$. Montrer qu'un endomorphisme f de E est solution de (1) si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$

Partie C

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. a et b sont deux réels non nuls.
On considère l'équation (2) : $a\,f^{\,2} + b\,f = \mathbf{0}$.

1. Soit f une solution de (2).

   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ f^{\,2}$ et $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Im}\ f^{\,2}$.

   (b) Montrer que Ker f et Im f sont deux espaces supplémentaires de E (on pourra remarquer que $\forall\ u \in E,\quad u = \left(u + \dfrac{a}{b}\,f(u)\right) - \dfrac{a}{b}\,f(u)$).

   (c) Déterminer la restriction de f à Im f.

   (d) Si $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$, quelle est l'application f ?

   (e) Montrer que f est la composée "commutable" de deux endomorphismes simples que l'on précisera.

2. Soit V et V' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
   Montrer qu'il existe une solution unique f de (2) telle que $\mathrm{Ker}\ f = V$ et $\mathrm{Im}\ f = V'$.