Devoir Surveillé 12 - Eléments de Correction

Exercice 1
Partie A

1. Notons que, dans la base $\mathcal{B}=(i,j,k)$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

ce qui donne l'expression analytique : $\boxed{f \begin{cases} x' = +2\,x - y - z \\ y' = -x + 2\,y - z \\ z' = -x - y + 2\,z \end{cases}}$

Note : on obtient facilement le résultat précédent par linéarité.

Un vecteur $u = xi + yj + zk \in E$ a pour image

$$\begin{aligned} f(u) &= x\,f(i) + y\,f(j) + z\,f(k) \\ &= x\,\big(2i - j - k\big) + y\,\big(-i + 2j - k\big) + z\,\big(-i - j + 2k\big) = \cdots \end{aligned}$$

— Noyau : $u\,\big(x,y,z\big) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow \big(x',y',z'\big) = \big(0,0,0\big)$.

Ceci est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{l|l} +2x - y - z = 0 & 1 \\ -x + 2y - z = 0 & 1 \\ -x - y + 2z = 0 & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l|l} +2x - y - z = 0 & 1 \\ -x + 2y - z = 0 & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x - 3y \quad = 0 \end{cases}$$

Finalement, les vecteurs du noyau sont les vecteurs de la forme

$\big(x,x,x\big) = x\,\big(1,1,1\big)$ donc $\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ est la droite } D_{(1,1,1)}}$

— Image : $v\,\big(x',y',z'\big) \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \exists\, u\,\big(x,y,z\big) \in E \quad f(u) = v$ qui se traduit par

$$\left\{\begin{array}{l|l} +2\,x - y - z = x' & 1 \\ -x + 2\,y - z = y' & 1 \\ -x - y + 2\,z = z' & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' + z' = 0 \\ +2x - y - z = y' \\ -x + 2y - z = z' \end{cases} \quad (m \neq 0)$$

On choisit z arbitrairement. Les deux dernières équations permettent de calculer x et y en fonction de x',y',z',z. L'existence de v se réduit à la première condition.

Conclusion $\boxed{\operatorname{Im}(f) \text{ est le plan d'équation } x + y + z = 0}$

2. Remarquons que $f(\Pi) \subset \operatorname{Im}(f)$. Comme ici $\operatorname{Im}(f) = \Pi$, nous avons $f(\Pi) \subset \Pi$.

Bonus

On peut donc envisager la restriction de f à Π.

Soit $u = \big(x,y,-x-y\big) \in \Pi$. L'expression analytique de **A-1** en donne l'image :

$$f(u) \begin{cases} x' = 2x - y + x + y & = 3\,x \\ y' = -x + 2y + x + y & = 3\,y \\ z' = -x - y + 2(-x-y) & = 3(-x-y) \end{cases} \Rightarrow f(u) = 3\,u$$

$\boxed{\text{La restriction de } f \text{ à } \Pi \text{ est l'homothétie vectorielle de rapport } 3}$

Pour tout vecteur $u \in E$, $f(u) \in \operatorname{Im}(f) = \Pi$ donc $f\big(f(u)\big) = h\,\big(f(u)\big) = 3\,f(u)$,

ce qui montre que $\forall\, u \in E\,,\ f \circ f(u) = 3\,f(u)$ $\boxed{f \circ f = 3\,f}$

Vérification par le calcul analytique

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{f} u' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} \xrightarrow{f} u'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x' - y' - z' \\ -x' + 2y' - z' \\ -x' - y' + 2z' \end{pmatrix}$$

qui donne $x'' = 2(2x - y - z) - (-x + 2y - z) - (-x - y + 2z) = 3(2x - y - z) = 3\,x$

et de même $y'' = 3\,y'$ et $z'' = 3\,z'$, $\boxed{\text{ce qui confirme le résultat.}}$

3. (a) L'homothétie de rapport k est $h = k\ \mathrm{Id}$. Un calcul dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ donne alors $h \circ p = k\ \mathrm{Id} \circ p = k\,p$ et $p \circ h = p \circ (k\ \mathrm{Id}) = k\,p \circ \mathrm{Id} = k\,p$

Conclusion $\boxed{h \circ p = p \circ h = k\,p}$

Note : on retrouve ceci en utilisant $h(u) = k\,u$ et la linéarité de p

$\forall\, u \in E\,,\quad h \circ p(u) = k\,p(u) \quad$ et $\quad p \circ h(u) = p(k\,u) = k\,p(u)$

(b) D'après ce qui précède : $\varphi = p \circ h = k\,p$ donc (calcul dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$)

$\varphi \circ \varphi = (k\,p) \circ (k\,p) = k^2\,p \circ p = k^2\,p = k\,\varphi$ $\boxed{\varphi = p \circ h \ \Rightarrow\ \varphi \circ \varphi = k\,\varphi}$

La réciproque est : "si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\varphi \circ \varphi = k\,\varphi$, alors $\varphi = h \circ p$ où p est une projection et h l'homothétie vectorielle de rapport k".

Il suffit de remarquer que $\varphi \circ \varphi = k\,\varphi \Rightarrow (\lambda\varphi) \circ (\lambda\varphi) = \lambda^2\,k\,\varphi = \lambda k(\lambda\varphi)$.

Ainsi, avec $\lambda = \frac{1}{k}$, l'application $p = \frac{1}{k}\,\varphi$ est une projection (application linéaire idempotente) d'où $\boxed{\varphi = k\,p = h \circ p}$

(c) Puisque f linéaire vérifie $f \circ f = 3\,f$, ce qui précède montre que $f = h \circ p$ où h est l'homothétie de rapport 3, et $p = \frac{1}{3}\,f$ est une projection .

— La base A de projection est l'ensemble des invariants :

$$u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in A \Leftrightarrow p(u) = u \Leftrightarrow f(u) = 3u \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 3x \\ -x + 2y - z = 3y \\ -x - y + 2z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

— La direction B de projection est le noyau de $p = \frac{1}{3}\,f$, donc $B = \operatorname{Ker}(f)$ déjà calculé.

CONCLUSION $\boxed{f = h \circ p \quad \begin{cases} h \text{ homothétie de rapport } 3 \\ p \text{ projection sur } \Pi \text{ de direction } D_{(1,1,1)} \end{cases}}$

4. $f_m = mf \qquad \mathcal{F} = \{f_m \;—\; m \in \mathbb{R}^*\}$

(a) Remarquons que $f_m \circ f_{m'} = m\,m' \underbrace{f \circ f}_{=3\,f} = 3\,m\,m'\,f = f_{3mm'}$

Ainsi, $\boxed{(\mathcal{F}, \circ) \text{ est un groupe commutatif}}$ puisque :

- $\circ$ est une **LCI** sur $\mathcal{F}$ $\quad (m, m' \in \mathbb{R}^* \Rightarrow 3\,m\,m' \in \mathbb{R}^*$, car $3mm' \neq 0$)
- $\circ$ est associative
- $\circ$ est commutative dans $\mathcal{F}$ $\quad (3mm' = 3m'm$ donc $f_m \circ f_{m'} = f_{m'} \circ f_m)$
- $f_{1/3}$ est élément neutre $\quad (f_{1/3} \circ f_m = f_{3\frac{1}{3}m} = f_m$ et la commutativité)
- $m \neq 0$: le symétrique de f_m est $f_{1/9m}$ $\quad (f_m \circ f_{1/9m} = f_{3m\frac{1}{9m}} = f_{1/3}$ él^t neutre) $\mathrm{Ker}\,(f_{1/3}) = \mathrm{Ker}\,(\frac{1}{3}\,f) = \mathrm{Ker}\,(f) = D_{(1,1,1)}$ qui n'est pas réduit à $\{0\}$

CONCLUSION $\boxed{\text{L'élément neutre } f_{1/3} \text{ n'est pas un automorphisme}}$

Remarquons que, bien que la loi soit $\circ$, composition des applications :

- l'élément neutre n'est pas l'application identique,
- f_m est inversible dans $\mathcal{F}$ sans être bijective.

(b) Le calcul dans $\mathcal{F}$ montre que

$$f_m \circ f_m - 3\,m\,f_m = f_{3m^2} - 3mf_m = 3m^2 f - 3m^2 f = \mathbf{0}$$

CONCLUSION $\boxed{(f_m)^2 - 3\,m\,f_m = \mathbf{0}}$

Partie B

(1) $a\,f^2 + b\,f + c\;\mathrm{Id} = \mathbf{0}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

1. L'application $f = \lambda\,\mathrm{Id}$ est solution de (1) si et seulement si

$a\,\lambda^2\;\mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} + b\,\lambda\;\mathrm{Id} + c\,\mathrm{Id} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c)\,\mathrm{Id} = \mathbf{0} \Leftrightarrow a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0$

Si $b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$,cette dernière équation admet au moins une solution réelle,donc

$\boxed{\text{si } b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0 \text{ , (1) admet au moins une solution dans } \mathcal{L}(E)}$

2. Si $c \neq 0$ et si f est une solution de (1), nous pouvons écrire

$$a\,f^2 + b\,f = -c\;\mathrm{Id} \Leftrightarrow f \circ \left(-\tfrac{a}{c}\,f - \tfrac{b}{c}\,\mathrm{Id}\right) = \left(-\tfrac{a}{c}\,f - \tfrac{b}{c}\,\mathrm{Id}\right) \circ f = \mathrm{Id}$$

qui montre que $-\frac{a}{c}\,f - \frac{b}{c}\,\mathrm{Id}$ est l'application réciproque de f $\boxed{c \neq 0 \Rightarrow f \text{ bijective}}$

3. $b = c = 0\,,\; a \neq 0.$ L'équation (1) se réduit à $f^2 = \mathbf{0}$.

- Si f est solution de (1), alors, pour tout vecteur $u \in \mathrm{Im}\,(f)$ nous avons
$$\exists\, v \in E\,,\; u = f(u) \Rightarrow f(u) = \underbrace{f^2}_{=\mathbf{0}}(v) = 0 \Rightarrow u \in \mathrm{Ker}\,(f)$$
d'où l'inclusion $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$
- Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$, alors $f^2 = \mathbf{0}$ puisque
$$\forall\, u \in E\,, \quad f(u) \in \mathrm{Im}\,(f) \Rightarrow f(u) \in \mathrm{Ker}\,(f) \Rightarrow f\big(f(u)\big) = 0$$

CONCLUSION $\boxed{f \text{ solution de } f^2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)}$

Partie C

1. f vérifie $a\,f^2 + b\,f = \mathbf{0}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

(a) Puisque $f^2 = -\frac{b}{a}\,f$ et $f = -\frac{a}{b}\,f^2$, il est évident que $f(u) = 0 \Leftrightarrow f^2(u) = 0$.

CONCLUSION $\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f^2)}$

De même :

$$u \in \mathrm{Im}\,(f) \Leftrightarrow \exists\, v \in E\,,\; u = f(v) = -\tfrac{a}{b}\,f^2(v) = f^2(-\tfrac{a}{b}\,v) \Rightarrow u \in \mathrm{Im}\,(f^2)$$
$$u \in \mathrm{Im}\,(f^2) \Leftrightarrow \exists\, v \in E\,,\; u = f^2(v) = -\tfrac{b}{a}\,f(v) = f(-\tfrac{b}{a}\,v) \Rightarrow u \in \mathrm{Im}\,(f)$$

CONCLUSION $\boxed{\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)}$

(b) Tout vecteur u de E peut s'écrire $u = \big(u + \frac{a}{b}\,f(u)\big) - \frac{a}{b}\,f(u)$, or

- $f\,\big(u + \frac{a}{b}\,f(u)\big) = f(u) + \frac{a}{b}\,f^2(u) = \frac{1}{b}\,\underbrace{\big(b\,f + a\,f^2\big)}_{=\mathbf{0}}(u) = 0 \Rightarrow u + \frac{a}{b}\,f(u) \in \mathrm{Ker}\,(f)$
- $-\frac{a}{b}\,f(u) = f\,\big(-\frac{b}{a}\,u\big) \Rightarrow -\frac{a}{b}\,f(u) \in \mathrm{Im}\,(f)$

Ainsi : $E = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f)$.

D'autre part : $\forall\, u \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f) \quad \begin{cases} \exists\, v \in E\,,\; u = f(v) \\ f(u) = 0 \end{cases}$

Mais $a\,f^2(v) + b\,f(v) = 0$ donc $a\,f(u) + b\,u = 0$ soit $b\,u = 0 \Rightarrow u = 0 \quad (b \neq 0)$

ceci prouve que $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0\}$. $\boxed{E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)}$

(c) $\boxed{\text{La restriction de } f \text{ à } \mathrm{Im}\,(f) \text{ est l'homothétie vectorielle de rapport } -\frac{b}{a}}$

puisque $\forall\, u \in \mathrm{Im}\,(f)\,,\; \exists\, v \in E \quad u = f(v) \Rightarrow f(u) = f^2(v) = -\frac{b}{a}\,f(v) = -\frac{b}{a}\,u$

(d) Si $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, alors $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \{0\} = \operatorname{Im} f$.

Dans ce cas $\boxed{f \text{ est l'homothétie de rapport } -\frac{b}{a}}$

(e) Puisque $f^2 = -\frac{b}{a} f$, la question **A-3-b** montre que f est la composée de l'homothétie de rapport $-\frac{b}{a}$ et d'une projection, composée commutative d'après **A-3-a**.

2. *Analyse du problème*

Puisqu'une solution f de (2) vérifie $f = p \circ h$, où h est l'homothétie vectorielle de rapport $-\frac{b}{a}$, nous avons $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(p)$, p doit être la projection sur V' de direction V, d'où l'unicité d'une éventuelle solution vérifiant les conditions.

Réciproquement

$f = p \circ h$ où p et h sont la projection et l'homothétie précisées ci-dessus vérifie bien l'équation (2) et les conditions sur $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$, d'où l'existence.