Devoir Surveillé 11

Le vendredi 31 Mai 2024

14h-15h30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1 , R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1,P_2 et P_3. On a donc $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ et on admet que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $0 < P_\mathrm{i} < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.
Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon.
On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. (a) Justifier soigneusement que $X = X_1 + X_2 + X_3$.
   (b) Donner la loi de X_i, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$.
   (c) En déduire l'espérance de X, notée $E(X)$.

   La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local.

   Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (1 - x)^\mathrm{n} + (1 - y)^\mathrm{n} + (x + y)^\mathrm{n}$.
2. (a) On pose $P_1 = x$ et $P_2 = y$. Vérifier que $E(X) = f(x, y)$.
   (b) Montrer que f est une fonction de classe C^1 sur $]0, 1[\times]0, 1[$.
3. (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) En déduire que le seul point critique est le point $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.
   (c) On admet que f présente un minimum local en ce point. Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.

Exercice 2

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels.

On considère n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I_n désigne ma matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le but de ce problème est l'étude des ensembles $\mathcal{R}_n(p) = \Big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;—\; A^p = I_n\Big\}$.

Dans le deuxième et la troisième partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = \big\{e_1, e_2\big\}$, et Id_E désigne l'identité de E.

Partie A

1. $\mathcal{R}_n(p)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.
3. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}A\,P \in \mathcal{R}_n(p)$.
4. Montrer que $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.
5. On considère q un entier naturel supérieur ou égal à 2, et on appelle d le plus grand diviseur commun de p et q. Montrer que $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q) = \mathcal{R}_n(d)$.

Partie B - Étude de $\mathbb{R}_2(2)$

1. Soit A un élément de $\mathcal{R}_2(2)$ tel que $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$, et soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\big(u - \mathrm{Id}_E\big) \oplus \mathrm{Ker}\,\big(u + \mathrm{Id}_E\big) = E$.
   (b) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de$u$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $ad - bc \neq 0$ et
$$A = \frac{1}{a\,d - b\,c}\begin{pmatrix} a\,d + b\,c & -2\,a\,b \\ 2\,c\,d & -a\,d - b\,c \end{pmatrix}$$
2. Montrer que $\mathcal{R}_2(2)$ muni de la multiplication des matrices n'est pas un groupe. Interpréter géométriquemen ce résultat.

Partie C - Étude de $\mathbb{R}_2(3)$

Dans toute la suite du problème, M désigne un élément de $\mathbb{R}_2(3)$, et v l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M. On considère les sous-espaces vectoriels de E :

$$F = \mathrm{Ker}\,\big(v - \mathrm{Id}_E\big) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}\,\big(v^2 + v + \mathrm{Id}_E\big) \qquad \text{où} \quad v^2 = v \circ v$$

1. Montrer que $F \cap G = \big\{0\big\}$.
2. Soit $x \in E$. Montrer que
$$\frac{1}{3}\,\big(x + v(x) + v^2(x)\big) \in F \quad \text{et que} \quad \frac{1}{3}\,\big(2x - v(x) - v^2(x)\big) \in G$$
3. En déduire que $E = F \oplus G$.