Devoir Surveillé 10 - Eléments de Correction

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1 , R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1,P_2 et P_3. On a donc $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ et on admet que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $0 < P_i < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.
Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon.
On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. (a) X_i compte le nombre de résultat parmi $\{R_i\}$ non obtenus. Donc $X_1 + X_2 + X_3$ compte le nombre de résultats parmi $\{R_1, R_2, R_3\}$ non obtenus. Donc le nombre total de résultats non obtenus est bien $X = X_1 + X_2 + X_3$

   (b) $(X_i = 1)$ signifie qu'en n épreuves indépendantes, le nombre de "R_i" obtenu est nul. Or ce nombre suit une loi binômiale de paramêrtes (n, P_i) donc $\mathrm{P}(X_i = 1) = \binom{n}{0} P_i^0 (1 - P_i)^n = (1 - P_i)^n$ et

   Conclusion : $\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left((1 - P_i)^n\right)}$

   (c) Comme $E(X_i) = (1 - P_i)^n$ alors par linéarité

   Conclusion : $\boxed{E(X) = (1 - P_1)^n + (1 - P_2)^n + (1 - P_3)^n}$

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local.

Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (1 - x)^n + (1 - y)^n + (x + y)^n$.

2. (a) Comme $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ alors $1 - P_3 = P_1 + P_2$ donc $E(X) = f(P_1, P_2)$

   (b) Comme $(x, y) \to x$ est C^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que $z \to z^n$ est C^2 sur $\mathbb{R}$ alors $(x, y) \to (1 - x)^n$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$

   Et de même pour f.

3. (a) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = n(1 - x)^{n-1} \times -1 + n(x + y)^{n-1}$$
$$= n\left[(x + y)^{n-1} - (1 - x)^{n-1}\right]$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = n\left[(x + y)^{n-1} - (1 - y)^{n-1}\right]$$

   (b) On a donc

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x + y)^{n-1} - (1 - x)^{n-1} = 0 \\ (x + y)^{n-1} - (1 - y)^{n-1} = 0 \quad L_2 - L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x + y)^{n-1} - (1 - x)^{n-1} = 0 \\ (1 - x)^{n-1} = (1 - y)^{n-1} \end{cases}$$

   et $(1 - x)^{n-1} = (1 - y)^{n-1} \iff 1 - x = 1 - y$ car $n - 1 > 0$ et donc la fonction $x \to x^{n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $1 - x \geq 0$ et $1 - y \geq 0$

   Donc

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2x)^{n-1} - (1 - x)^{n-1} = 0 \\ x = y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x = 1 - x \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

   Donc le seul point de $]0, 1[\times]0, 1[$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

   (c) Dans ce cas on a $E(X) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice 2

Partie A

1. $\mathcal{R}_n(p)$ n'est pas un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car non stable pour l'addition
(par exemple : $I_n \in \mathcal{R}_n(p)$ mais $I_n + I_n \notin \mathcal{R}_n(p)$

2. Si $A \in \mathcal{R}_n(p)$ alors $A^p = I_n$ d'où $A.A^{p-1} = A^{p-1}.A = I_n$ (avec $p - 1 \geqslant 1$) ce qui montre que A est inversible avec $A^{-1} = A^{p-1}$.

3. Il est connu que $\left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right)^p = P^{-1} \cdot A^p \cdot P$

$$\text{car} \quad = P^{-1} \cdot A \cdot \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{=I_n} \cdot A \cdot \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I_n} \cdots \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I_n} \cdot A \cdot P$$

(une récurrence simple en donne une démonstration rigoureuse).

Ainsi, $A \in \mathcal{R}_n(p) \Rightarrow A^p = I_n \Rightarrow \left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right)^p = P^{-1} \cdot \underbrace{A^p}_{=I_n} \cdot P = I_n$

Conclusion $\boxed{A \in \mathcal{R}_n(p) \Rightarrow P^{-1} \cdot A \cdot P \in \mathcal{R}_n(p)}$

Note : ceci est normal puisque cela traduit $u^p = Id_E$ dans deux bases différentes.

4. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Comme $A^p = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^p \end{pmatrix}$, l'égalité $A^p = I_n$ devient $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_i^p = 1$ donc $a_i = 1$ ou $a_i = \pm 1$ suivant la parité de p (puisque on travaille dans $\mathbb{R}$).

Conclusion

Si p est impair, une unique solution	$A = I_n$
Si p est pair, 2^n solutions	$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

5. Montrons la double inclusion :
   - $d = \text{PGCD}\,(p, q)$ donc $\exists\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $d = pk_1 + qk_2$.
     Alors, pour $A \in \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$:
     $A^p = A^q = I_n \Rightarrow A^d = A^{pk_1 + qk_2} = \left(A^p\right)^{k_1} \cdot \left(A^q\right)^{k_2} = I_n$ soit $A \in \mathcal{R}_n(d)$
   - $d = \text{PGCD}\,(p, q)$ donc $\exists\ p_1, q_1 \in \mathbb{N}$, $, p = d\,p_1$ et $q = dq_1$.
     Alors, pour $A \in \mathcal{R}_n(d)$:
     $A^p = \left(A^d\right)^{p_1} = I_n^{p_1} = I_n$ et $A^q = \left(A^d\right)^{q_1} = I_n^{q_1} = I_n$ soit $A \in \mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q)$

   Conclusion $\boxed{\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q) = \mathcal{R}_n\left(\text{PGCD}\,(p, q)\right)}$

Partie B

1. *Note :* u de matrice $A \overset{+}{\neq_-} I_2$ dans $\mathcal{B}$ est involutive ($A^2 = I_2 \Rightarrow u^2 = \text{Id}_E$). C'est donc une symétrie vectorielle, d'où le résultat demandé. De plus, $u \neq \pm\,\text{Id}_E$ montre que la base de symétrie et la direction ne sont ni E, ni $\{0\}$. Ce sont des droites vectorielles.

   (a) Donnons en une démonstration directe :
   - $\forall\ t$, $t \in \text{Ker}\,(u - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}\,\left(u + \text{Id}_E\right) \Rightarrow u(t) = t = -t \Rightarrow t = 0$
   - *analyse du problème :* $\forall\ t \in E$, si $t = \underbrace{t_1}_{\in \text{Ker}\,(u - \text{Id}_E)} + \underbrace{t_2}_{\in \text{Ker}\,(u + \text{Id}_E)}$,

     alors $\begin{cases} t &= t_1 + t_2 \\ u(t) &= t_1 - t_2 \end{cases}$ donne $\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{2}\left(t + u(t)\right) \\ t_2 = \dfrac{1}{2}\left(t - u(t)\right) \end{cases}$ (condition nécessaire)
   - *Vérification* :il est clair que :
     $t = t_1 + t_2$
     $u(t_1) = \dfrac{1}{2}\left(u(t) + \left(u \circ u(t)\right)\right) = t_1$ (car $u \circ u = \text{Id}_E$) donc $t_1 \in \text{Ker}\,\left(u - \text{Id}_E\right)$
     $u(t_2) = \dfrac{1}{2}\left(u(t) - u \circ u(t)\right) = -t_2$ donc $t_2 \in \text{Ker}\,\left(u + \text{Id}_E\right)$

   (b) Comme $u \neq \text{Id}_E$, $u - \text{Id}_E \neq 0 \Rightarrow \dim\left(\text{Ker}\,\left(u - \text{Id}_E\right)\right) < \dim(E) = 2$.
   De même $u \neq -\,\text{Id}_E \Rightarrow \dim\left(\text{Ker}\,\left(u + \text{Id}_E\right)\right) \leqslant 1$.
   Comme la somme de ces deux dimensions vaut 2, les deux noyaux sont tous deux de dimension 1.
   En prenant $\left(e_1'\right)$ base de Ker $\left(u - \text{Id}_E\right)$ et $\left(e_2'\right)$ base de Ker $\left(u + \text{Id}_E\right)$, les espaces étant supplémentaires dans E, $\boxed{\left(e_1', e_2'\right) \text{ est une base de } E}$

   Comme $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = e_2$, dans cette base, la matrice de u est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (c) La suite n'est qu'un changement de base. En posant $e_1' = ae_1 + ce_2$ et $e_2' = be_1 + de_2$, la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
   Le changement de base donne $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$, soit $A = P \cdot A' \cdot P^{-1}$.
   Le calcul donne finalement

   $$A = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{pmatrix}$$

2. $\mathcal{R}_2(2)$ n'est pas stable pour la multiplication. Contre-exemple :
   avec les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_2(2)$ [pour $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, -1)$] mais

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{R}_2(2) \quad \text{puisque} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I_2 \neq I_2$$

Conclusion $\boxed{\mathcal{R}_2(2) \text{ n'est pas un groupe multiplicatif}}$

Partie C - Étude de $\mathbb{R}_2(3)$ INTEGRALITE du SUJET

Dans toute la suite du problème, M désigne un élément de $\mathbb{R}_2(3)$, et v l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M. On considère les sous-espaces vectoriels de E :

$$F = \text{Ker}\left(v - \text{Id}_E\right) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}\left(v^2 + v + \text{Id}_E\right) \qquad \text{où} \quad v^2 = v \circ v$$

1. (a) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
   (b) Soit $x \in E$. Montrer que
   $$\frac{1}{3}\left(x + v(x) + v^2(x)\right) \in F \quad \text{et que} \quad \frac{1}{3}\left(2x - v(x) - v^2(x)\right) \in G$$
   (c) En déduire que $E = F \oplus G$.
2. Que peut-on dire de M si F est de dimension 2 ?
3. Le but de cette question est de montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que F n'est pas de dimension 1. On suppose donc que F est de dimension 1.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$ de E telle que F soit la droite vectorielle engendrée par g_1 et G soit la droite vectorielle engendrée par g_2.
   (b) En considérant le vecteur $v^2(g_2) + v(g_2) + g_2$, obtenir une contradiction.
4. On suppose dans cette question que F est de dimension 0.
   (a) Montrer que $\left(e_1, v(e_1)\right)$ est une base de E .
   (b) En déduire qu'il existe un réel a et un réel non nul b tels que $M = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} ab & -1-a-a^2 \\ b^2 & -ab-b \end{pmatrix}$

Partie C - INTEGRALITE de la CORRECTION

$$F = \text{Ker}\,(v - \text{Id}_E), \quad G = \text{Ker}\,(v^2 + v + \text{Id}_E) \quad \text{et} \quad v^3 = \text{Id}_E$$

1. (a) $\forall\, t, \quad t \in F \cap G \Rightarrow v(t) = t$ et $v^2(t) + v(t) + t = 0$, qui donne immédiatement $t + t + t = 0$ donc $t = 0$ d'où $\boxed{F \cap G = \{0\}}$
   (b) Pour montrer que $\forall\, x \in E \quad u = \frac{1}{3}\left(x + v(x) + v^2(x)\right) \in F$, calculons dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$: $\left(v - \text{Id}_E\right) \circ \left(v^2 + v + \text{Id}_E\right) = \underbrace{v^3}_{=\text{Id}_E} - \text{Id}_E = 0$ qui prouve l'affirmation.
   Pour montrer que $\forall\, x \in E \quad u = \frac{1}{3}\left(2\,x - v(x) - v^2(x)\right) \in G$, calculons de même $\left(v^2 + v + \text{Id}_E\right) \circ \left(-v^2 - v + 2\,\text{Id}_E\right) = \underbrace{-v^4}_{=-v} - 2\underbrace{v^3}_{=\text{Id}_E} + v + 2\,\text{Id}_E = 0$ d'où le résultat.
   (c) Ainsi, tout vecteur x de E s'écrit
   $$x = \underbrace{\frac{1}{3}\left(x + v(x) + v^2(x)\right)}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{3}\left(2\,x - v(x) - v^2(x)\right)}_{\in G} \in F + G$$
   Comme de plus $F \cap G = \{0\}$, nous avons bien $\boxed{E = F \oplus G}$
2. F est un **SEV** de E qui est de dimension 2. Si $\dim(F) = 2$, alors $F = E$.
   Ainsi, Ker $\left(v - \text{Id}_E\right) = E \Rightarrow v - \text{Id}_E = 0$, soit finalement $\boxed{v = Id_E \quad \text{et} \quad M = I_2}$
3. (a) Si F est de dimension 1 (droite vectorielle), il en est de même pour G (ils sont supplémentaires dans E qui est de dimension 2). En prenant (g_1) base de F et (g_2) base de G, nous avons alors $\boxed{(g_1, g_2) \text{ base de } E}$
   .
   (b) Si α et β sont les coordonnées de $v(g_2)$ dans la base (g_1, g_2), nous obtenons :
   $$v(g_2) = \alpha\, g_1 + \beta\, g_2$$
   $$v^2(g_2) = \alpha\,\underbrace{v(g_1)}_{=g_1} + \beta\,\underbrace{v(g_2)}_{=\alpha g_1 + \beta g_2} = \alpha\left(1 + \beta\right) g_1 + \beta^2 g_2$$
   Comme $g_2 \in G$, $\left(v^2 + v + \text{Id}_E\right)(g_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(2 + \beta\right) g_1 + \left(\beta^2 + \beta + 1\right) g_2 = 0$.
   (g_1, g_2) étant libre, $\Rightarrow \begin{cases} \alpha\left(2 + \beta\right) & = 0 \\ \beta^2 + \beta + 1 & = 0 \end{cases}$ où la deuxième condition est impossible avec $\beta \in \mathbb{R}$. Conclusion $\boxed{F \text{ n'est pas de dimension } 1}$
4. Si F est de dimension 0, alors G est de dimension 2 donc Ker $(v^2 + v + \text{Id}_E) = G = E$ c'est-à-dire $v^2 + v + Id_E = 0$.

(a) • Montrons que $\left(e_1, v\left(e_1\right)\right)$ est libre en procédant par l'absurde :

si $\left(e_1, v(e_1)\right)$ est lié, comme $\left(e_1\right)$ est libre (car $e_1 \neq 0$) nous avons

$\exists\ \alpha \in \mathbb{R} \quad v(e_1) = \alpha\, e_1$ donc $\left(v^2 + v + \mathrm{Id}_E\right)(e_1) = 0$ devient

$\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right) e_1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ ce qui est impossible pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

• La famille $\left(e_1, v(e_1)\right)$ est une famille libre de E de dimension 2 :

donc $\boxed{\left(e_1, v(e_1)\right) \text{ est une base de } E}$

(b) $v\left(v(e_1)\right) + v(e_1 + e_1 = 0 \Rightarrow v\left(v(e_1)\right) = -v(e_1) - e1$ montre que, dans cette base, la matrice de v est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

La même technique de changement de base qu'au **B-** donne la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (on ne change pas e_1) et $P^{-1} = \dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{Det}(P) \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$, et enfin

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & -a\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion $\boxed{M = \dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} ab & -1 - a - a^2 \\ b^2 & -b - ab \end{pmatrix}}$