Devoir Surveillé 11 - Eléments de Correction

Exercice 1

T est l'ensemble des couples (x, y) de réels solutions du système d'inéquations

$$x \geq \frac{1}{4} \quad y \geq \frac{1}{4} \quad x + y \leq \frac{3}{4}$$

On note T' l' "intérieur" de T à savoir l'ensemble des couples (x, y) solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4} \quad y > \frac{1}{4} \quad x + y < \frac{3}{4}$$

Soit f la fonction définie sur T par : $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x + y}$

1. Représenter sur un même graphique T et T'.
2. On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Sut T' on a $x + y \geq \frac{1}{2}$ donc f est de calsse C^2 sur T' (car $x \neq 0$: $y \neq 0$ et $x + y \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x + y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{1}{y^2} + \frac{2}{(x + y)^2} \end{aligned}$$

   (b) Sur l'ouvert T', **si** f a un extremum en (x, y) alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$
   donc $\begin{cases} \frac{1}{x^2} = \frac{2}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{y^2} = \frac{2}{(x+y)^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2y^2 = (x + y)^2 \end{cases}$ d'où $x = y$ car $x \geq 0$ et $y \geq 0$
   Alors $2y^2 = (2y)^2$ et $y = 0$ ce qui est impossible sur T'
   Donc f n'a pas d'extremum local sur T'.
3. Il faut à la fois minorer et majorer :
   Sur le graphe de T' on **voit** que $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{4}$.
   On le **prouve :**
   $x \geq \frac{1}{4}$ et $y \geq \frac{1}{4}$ donc $x + y \geq \frac{1}{2}$
   $x + y \leq \frac{3}{4}$ donc $x \leq \frac{3}{4} - y$; et comme $y \geq \frac{1}{4}$ alors $-y \leq -\frac{1}{4}$ et $x \leq \frac{1}{2}$ et de même pour y.
   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{4}}$

$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y}$
On enchaine les déductions pour arriver à l'expressoin de f :
$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ donc $2 \leq \frac{1}{x} \leq 4$ car la fonction $x \to \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$
$\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{2}$ donc $2 \leq \frac{1}{y} \leq 4$.
$\frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{4}$ donc $\frac{8}{3} \leq \frac{2}{x+y} \leq 4$ et $-4 \leq -\frac{2}{x+y} \leq -\frac{8}{3}$
D'où $2 + 2 - 4 \leq f(x, y) \leq 4 + 4 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

Les "simples considérations" donnent le résultat escompté à droite, mais pas à gauche.

Il faut donc être moins simple : on réduit les fractions.
$f(x, y) = \dfrac{y(x + y) + x(x + y) - 2x\,y}{x\,y\,(x + y)} = \dfrac{y^2 + x^2}{x\,y\,(x + y)}$
Avec $x^2 \geq \frac{1}{16}$ et $y^2 \geq \frac{1}{16}$ d'où $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{8}$
$x\,y\,(x + y) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ (produit d'inégalité à termes positifs !) donc $\frac{1}{x\,y(x+y)} \geq \frac{3}{16}$
et $f(x, y) \geq \frac{1}{8}\frac{3}{16}$ ce qui ne convient toujours pas !
On en revient à une résolution classique :

$$\begin{aligned} f(x, y) \geq 2 &\iff \frac{y^2 + x^2}{x\,y\,(x + y)} \geq 2 \\ &\iff y^2 + x^2 \geq 2x\,y\,(x + y) \\ &\iff y^2(1 - 2x) + x^2(1 - 2y) \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui est vrai car $y \leq \frac{1}{2}$ et $x \leq \frac{1}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } (x, y) \text{ de } T \text{ on a } 2 \leq f(x, y) \leq \frac{16}{3}}$

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u).

On suppose que $p \geq \dfrac{1}{4}$ $r \geq \dfrac{1}{4}$ $u \geq \dfrac{1}{4}$ et que $p + r + u = 1$.

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement : "Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage".
On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge).
On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

4. X est le rang d'apparition de la première blanche dans une suite de tirage indépebndants ayant tous la même probabiltié p de donner blanc.

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et de même $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(r)$

5. "La première" signifie que l'on en a une à un tirage et pas avant

— Si $i = j$,$(X = i) \cap (Y = j)$ est impossible et $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = 0$

— Si $i < j$ alors on a d'abord la première blanche et ensuite seulement la rouge :

$(X = i) \cap (Y = j) = V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} \cap B_i \cap \overline{R_{i+1}} \cap \cdots \cap \overline{R_{j-1}} \cap R_j$

Et comme les tirages sont indépendant :

$$\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = \mathrm{P}(V_1) \ldots \mathrm{P}(V_{i-1})\,\mathrm{P}(B_i)\,\mathrm{P}\left(\overline{R_{i+1}}\right) \ldots \mathrm{P}\left(\overline{R_{j-1}}\right)\mathrm{P}(R_j)$$

où il faut bien compter les occurences :

de 1 à $i-1$: $i-1$ termes

de $i+1$ à $j-1$: $j-1-(i+1)+1 = j-i-1$ termes

(vérification au total : $i-1+1+j-i-1+1 = j$)

D'où $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = u^{i-1}p\,(1-r)^{j-i-1}\,r$

— Et en inversant les roles de blanc et rouge (donc de p et r et de i et j)

si $i > j$, $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = u^{j-1}r\,(1-p)^{i-j-1}\,p$

La loi du couple est donc donnée par : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

— Si $i = j$: $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = 0$

— Si $i < j$: $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = u^{i-1}p\,(1-r)^{j-i-1}\,r$

— Si $i > j$: $\mathrm{P}[(X = i) \cap (Y = j)] = u^{j-1}r\,(1-p)^{i-j-1}\,p$

6. X et Y sont indépendante sir, **pour tout** (i, j) : $\mathrm{P}(X = i \cap Y = j) = \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = j)$

Pour monterr qu'elles ne le sont pas, il suffit de trouver **un** contre exemple :

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathrm{P}(X = 1 \cap Y = 1) = 0 \neq \mathrm{P}(X = 1)\,\mathrm{P}(Y = 1)$

7. On décompose l'événement avec les trems de la loi du couples :

$$\begin{aligned}(D = k) &= (|X - Y| = k)\\ &= (X - Y = k) \cup (X - Y = -k)\end{aligned}$$

car $k \geq 0$

$$(X - Y = k) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} (Y = j) \cap (X = j + k)$$

Les événements étant incompatibles (valeurs de Y toutes distinctes) mais X et Y pas indépendantes (ici $j + k \geq j$)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X - Y = k) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = j + k \cap Y = j)\\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} u^{j-1} r\,(1-p)^{j+k-j-1}\,p\\ &= \frac{r\,p}{u}(1-p)^{k-1}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u^j - 1\right)\\ &= \frac{r\,p}{u}(1-p)^{k-1}\left(\frac{1}{1-u} - 1\right)\\ &= \frac{r\,p}{1-u}(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

et de même en inversant les rôles de blanc et rouge :

$$\mathrm{P}(Y - X = k) = \frac{r\,p}{1-u}(1-r)^{k-1}$$

Comme $p + r + u = 1$ on a $1 - u = p + r$ et donc (incompatibles)

$$P(D = k) = \frac{pr}{p+r}\left[(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}\right]$$

8. D a une espérance si la série $\sum_{k \geq 1} k\,\mathrm{P}(D = k)$ est absolument convergente. ($\Longleftrightarrow$ convergente car tous les termes sont positifs)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} k\,\mathrm{P}(D=k) &= \sum_{k=1}^{N} k\frac{pr}{p+r}\left[(1-p)^{k-1}+(1-r)^{k-1}\right]\\
&= \frac{pr}{p+r}\left(\sum_{k=1}^{N} k(1-p)^{k-1}+\sum_{k=1}^{N} k(1-r)^{k-1}\right)\\
&= \frac{pr}{p+r}\left(\frac{1}{1-p}\sum_{k=0}^{N} k(1-p)^{k}-0+\frac{1}{1-r}\sum_{k=1}^{N} k(1-r)^{k}-0\right)\\
&\to \frac{pr}{p+r}\left(\frac{1}{1-p}\frac{1-p}{\left[1-(1-p)\right]^2}+\frac{1}{1-r}\frac{1-r}{\left[1-(1-r)\right]^2}\right)\\
&= \frac{pr}{p+r}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{r^2}\right)\\
&= \frac{p^2+r^2}{(p+r)\,p\,r}
\end{aligned}$$

Donc D a une espérance et $E(D)=\frac{p^2+r^2}{(p+r)p\,r}=f(p,r)$

Comme $p\geq\frac14$ et $r\geq\frac14$ et $p+r=1-u\leq\frac34$ (car $u\geq\frac14$) alors $(p,r)\in T$ et

Conclusion : $\boxed{2\leq E(D)\leq\frac{16}{3}}$

Exercice 2
Partie -A-

1. φ est définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P)=(X^2-1)P''+2XP'$.

   •**nature de l'image :** il est clair que l'image est un polynôme

   •**degré de l'image :** $\varphi(P)$ est visiblement au plus égal à 2 puisque P' est au plus de degré 1 et que P'' est constant.

   •**linéarité de φ :** elle provient de la linéarité de la dérivation :

   $\forall\ P,Q\in\mathbb{R}_2[X],\quad \forall\ \lambda\in\mathbb{R},$

   $$\begin{aligned}
   \varphi(P+\lambda Q) &= (X^2-1)(P+\lambda Q)''+2X(P+\lambda Q)'\\
   &= (X^2-1)(P''+\lambda Q'')+2X(P'+\lambda Q')\\
   &= (X^2-1)P''+2XP'+\lambda\left((X^2-1)Q''+2XQ'\right)=\varphi(P)+\lambda\varphi(Q)
   \end{aligned}$$

   Conclusion $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$

2. La matrice de φ s'obtient en cherchant l'image de la base :

   $$\left\{\begin{array}{ll}\varphi(1) & =(X^2-1)0+2X0=0\\ \varphi(X) & =(X^2-1)0+2X1=2X\\ \varphi(X^2) & =(X^2-1)2+2X2X=-2+6X^2\end{array}\right\} \text{ d'où } \boxed{M=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}}$$

3. Utilisons la matrice pour trouver le noyau :

   $$P\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}\,\varphi\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}-2c&=0\\2b&=0\\6c&=0\end{array}\right.\Leftrightarrow b=c=0$$

   Conclusion $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est l'ensemble des polynômes constants}}$

   Le noyau est de dimension 1. Le théorème du rang indique que l'image est de dimension 3-1=1. Comme l'image est engendrée par l'image d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$, en consultant la matrice on trouve immédiatement que $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Vect}\big(2X,-2+6X^2\big)$

   soit $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Vect}\big(X,1-3X^2\big)=\left\{a+bX-3aX^2,\quad a,b\in\mathbb{R}\right\}}$

4. (a) L'endomorphisme $(\varphi-\lambda\,\mathrm{Id})$ est non bijectif si et seulement si sa matrice n'est pas inversible, soit ici, étant triangulaire,si et seulement si un des coefficients diagonaux est nul

   Conclusion $\boxed{(\varphi-\lambda\,\mathrm{Id}) \text{ bijectif sauf pour } \lambda=0,\lambda=2,\lambda=6}$

   (b) Avec $\lambda=6$, la matrice ci-dessus permet le calcul du noyau de $(\varphi-6\,\mathrm{Id})$:

   $$\left\{\begin{array}{rr}-6a & -2c=0\\ -4b & =0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c=-3a\\b=0\end{array}\right. \qquad \boxed{\mathrm{Ker}(\varphi)=\left\{a(1-3X^2)\quad a\in\mathbb{R}\right\}}$$

Partie -B-

L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ $\quad(x^2-1)y''+2xy'-6y=0$ est définie sur $I=\left[-\frac12,\frac12\right]$.

Elle est linéaire du second ordre sans second membre (mais les coefficients ne sont pas constants).

1. *Recherchons le degré des polynômes solutions de $(\mathcal{E})$:* si P de degré n est solution alors :

   •$n=0\Rightarrow P=a$. La condition est $-6a=0$ donc $P=0$

   •$n=1\Rightarrow P=a+bx$. $\mathcal{E}$ devient $2bx-6(a+bx)=0\Leftrightarrow-4bx-6a=0$ donc $P=0$

   •$n\geqslant2\Rightarrow P=ax^n+\cdots,\ P'=nax^{n-1},\ P''=n(n-1)ax^{n-2}$.

   Alors $(x^2-1)P''+2xP'-6P$ est au plus de degré n.

Le coefficient de x^n est $a\left(n(n-1)+2n-6\right)$.
Il doit être nul, d'où la condition nécessaire (a n'étant pas nul) $n^2+n-6=0$ soit $n=2$ ou $n=-6$. Seul, $n=2$ conviennent. Nous venons de montrer que l'ensemble des solutions polynomiales de $(\mathcal{E})$ sont dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Quels sont ces polynômes ? puisque ces polynômes sont dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'équation s'écrit alors $\varphi(P)-6P=0$. L'ensemble de ces solutions est le noyau de $(\varphi-6\,\mathrm{Id})$ calculé au **A-3-b**. Conclusion $\boxed{P\in\mathbb{R}[X] \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \Leftrightarrow P=a(1-3X^2)}$

Le polynôme qui vérifie $K(0)=1$ est donc $\boxed{K(X)=1-3X^2}$

Soit $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)\,K^2(x)}=\dfrac{1}{(x^2-1)\,(3x^2-1)^2}$ et F la primitive qui s'annule en 0.

2. (a) Vérifions que KF est solution de (KE) :

$$(KF)'=K'F+Kf \qquad \text{et} \qquad (KF)''=K''F+2K'f+Kf'$$

d'où $(x^2-1)(KF)''+2x(KF)'-6(KF)$

$$=F\underbrace{\left((x^2-1)K''+2xK'-6K\right)}_{=0\text{car } K \text{ solution de } \mathcal{E}}+\underbrace{f\underbrace{\left((x^2-1)2K'+2xK\right)}_{=A}+(x^2-1)Kf'}_{=B}$$

Comme $KA=\left((x^2-1)K^2\right)'$ il vient

$$KB=f\left((x^2-1)K^2\right)'+(x^2-1)K^2f'=\underbrace{\left(f(x^2-1)K^2\right)}_{=1}{}'=0$$

Comme K ne s'annule pas sur I : $KB=0 \Rightarrow B=0$.
$\boxed{KF \text{ est solution de } \mathcal{E}}$

(b) Pour expliciter F, il suffit de décomposer en éléments simples (avant d'intégrer) :

$$f=\tfrac{1}{(x^2-1)(3x^2-1)^2}=\tfrac{a}{x-1}+\tfrac{b}{x+1}+\tfrac{c}{(x\sqrt{3}+1)^2}+\tfrac{d}{x\sqrt{3}+1}+\tfrac{e}{(x\sqrt{3}-1)^2}+\tfrac{h}{x\sqrt{3}-1}$$

la parité donne $b=-a,\quad c=e \quad\text{et}\quad h=-d$

le calcul de a est classique (multiplication par $(x-1)$ puis $x=1$) $a=\dfrac{1}{8}$

le calcul de e est identique $e=-\dfrac{3}{8}$

puis on remplace x par 0 : $-1=\underbrace{-a+b}_{=-2a=-1/4}+\underbrace{c+e}_{=2e=-3/4}+\underbrace{d-h}_{=-2h}\quad h=0$

On obtient donc $\boxed{f=\dfrac{1/8}{x-1}-\dfrac{1/8}{x+1}-\dfrac{3/8}{(x\sqrt{3}+1)^2}-\dfrac{3/8}{(x\sqrt{3}-1)^2}}$

Ceci s'intégre facilement.

Comme $\dfrac{1-x}{1+x}>0$ sur $]-1,1[$, on obtient $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{8}\,\ln\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{3}{4}\,\dfrac{x}{3x^2-1}}$

3. Nous avons deux solutions (K,KF) qui forment une famille libre (K n'étant pas nulle, il faudrait que F soit une fonction constante). L'espace vectoriel des solutions étant de dimension 2, cette famille en est une base. Une fonction est solutions si et seulement si elle est combinaisons linéaires de K et KF : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{K(\alpha F+\beta)\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}}$

Partie -C-

$$L(X)=\textstyle\prod_{k=1}^{d}\left(X-\tau_k\right) \qquad R(X)=\dfrac{1}{(X^2-1)\,L^2(X)} \qquad i\neq j \Rightarrow \tau_i\neq\tau_j.$$

Les τ_i sont différents deux à deux, d'où la forme de la décomposition :

$$R(X)=\frac{\alpha}{X-1}+\frac{\beta}{X+1}+\sum_{k=1}^{d}\frac{A_k}{(X-\tau_k)^2}+\sum_{k=1}^{d}\frac{B_k}{(X-\tau_k)}$$

1. Le calcul de a et b est classique (multiplication par $(X-1)$ puis $X=1\quad\cdots$). Il donne $\alpha=\dfrac{1}{(1+1)L^2(1)},\quad \beta=\dfrac{1}{(-1-1)L^2(-1)}$ $\boxed{\alpha=\dfrac{1}{2L^2(1)}\quad \beta=\dfrac{-1}{2L^2(-1)}}$

2. Une méthode semblable permet le calcul des A_k (multiplication par $(X-\tau_k)^2$ puis $X=\tau_k$). En notant $L_k=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant d\\ i\neq k}}(X-\tau_i)$ on obtient $A_k=\dfrac{1}{(\tau_k^2-1)L_k^2(\tau_k)}$.

   En dérivant $L(X)=(X-\tau_k)L_k(X)$, il vient $L'(X)=L_k(X)+(X-\tau_k)L_k'(X)$ soit encore $\underline{L'(\tau_k)=L_k(\tau_k)}$. Finalement $\boxed{A_k=\dfrac{1}{(\tau_k^2-1)\left(L'(\tau_k)\right)^2}}$

3. *Note :* En dérivant une deuxième fois, il vient :

$$L''(X)=2L_k'(X)+(X-\tau_k)L_k''(\tau_k), \qquad \text{d'où} \qquad \underline{L''(\tau_k)=2L_k'(\tau_k)}.$$

   Le calcul du résidu relatif à un pôle double est connu. Il provient de l'égalité

$$(X-\tau_k)^2R(X)=A_k+(X-\tau_k)B_k+(X-\tau_k)^2\Psi(X)$$

   qui montre que B_k est la valeur en τ_k de

$$\left((X-\tau_k)^2R(X)\right)'=\left(\frac{1}{(X^2-1)L_k^2(X)}\right)'=-\frac{2XL_k^2(X)+(X^2-1)2L_k(X)L_k'(X)}{\left((X^2-1)L_k^2(X)\right)^2}$$

   En utilisant les égalités précédentes, on obtient :

$$B_k = -\frac{2\tau_k L_k^2(\tau_k) + (\tau_k^2-1)2L_k(\tau_k)L_k'(\tau_k)}{\left((\tau_k^2-1)L_k^2(\tau_k)\right)^2} = -\frac{2\tau_k (L'(\tau_k))^2 + (\tau_k^2-1)L'(\tau_k)L''(\tau_k)}{(\tau_k^2-1)^2(L'(\tau_k))^4}$$

soit, après simplification : $\boxed{B_k = -\dfrac{2\tau_k L'(\tau_k) + (\tau_k^2-1)L''(\tau_k)}{(\tau_k^2-1)^2(L'(\tau_k))^3}}$

4. Soit $S(X) = (X^2-1)L''(X) + 2XL'(X)$.

   On remarque que le numérateur de B_k est $S(\tau_k)$. Comme $\tau_k \neq \pm 1$, il est alors évident que $(\forall\, k \in [\![1,d]\!] \quad B_k = 0) \Leftrightarrow (\forall\, k \in [\![1,d]\!] \quad S(\tau_k) = 0)$

   Puisque les τ_k sont distincts deux à deux, nous en déduisons

   $$S(X) = Q(X)\prod_{k=1}^{d}(X-\tau_k) = Q(X)L(X)$$

   D'autre part, la forme de S montre que $\deg(S) \leqslant \deg(L)$. On en déduit que Q est constant, donc $S(X) = \mu L(X), \quad \mu \in \mathbb{R}$.

   L étant normalisé, μ est le coefficient dominant de S. Calculons le :

   $$\begin{cases} L = X^d + \cdots \\ L' = dX^{d-1} + \cdots \\ L'' = d(d-1)X^{d-2} + \cdots \end{cases} \Rightarrow S = \big(d(d-1) + 2d\big)\, X^d + \cdots \qquad \text{soit}$$

   $\boxed{\mu = d(d+1)}$

5. Lorsque $d = 2$, nous obtenons $\mu = 6$. L est le polynôme normalisé de degré 2 tel que $S = 6L$, c'est-à-dire $(X^2-1)L'' + 2XL' = 6L$.

   L est donc la solution normalisée de $\mathcal{E}$, soit $\boxed{L = X^2 - \dfrac{1}{3}}$

Exercice 3
Partie -I-

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\tau(A) = a + d$ *(la trace)*

1. $\sigma : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est visiblement linéaire et involutive :

   — son expression analytique dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est $\begin{cases} a' = d \\ b' = -b \\ c' = -c \\ d' = a \end{cases}$

   — $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donc $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$

   $\boxed{\sigma \text{ est une symétrie}}$

   Nous savons que $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel [1] de dimension 4. Pour montrer que (I,J,K,L) en est une base, il suffit de montrer que cette famille est libre.

   SI $\sigma\, I + \beta\, J + \gamma\, K + \delta\, L = \mathbf{0}$ (matrice nulle), alors

   $$\begin{pmatrix} \alpha - i\,\delta & -\beta + i\,\gamma \\ \beta + i\,\gamma & \alpha + i\,\delta \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - i\,\delta = 0 \\ \alpha + i\,\delta = 0 \\ -\beta + i\,\gamma = 0 \\ \beta + i\,\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

   $\boxed{(I,J,K,L) \text{ est une base du } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel } \mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$

   Pour obtenir la matrice de σ relativement à cette base, il suffit d'en calculer les images. On obtient immédiatement $\sigma(I) = I$, $\sigma(J) = J,$, $\sigma(K) = -K$, $\sigma(L) = -L$

   donc la matrice de σ relativement à (I,J,K,L) est $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

2. $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

   (a) Vérifions que $\sigma(A\,B) = \sigma(B)\,\sigma(A)$ par un calcul matriciel :

   avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ nous avons

   $$A\,B = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(A\,B) = \begin{pmatrix} cb' + dd' & -ab' - bd' \\ -ca' - dc' & aa' + bc' \end{pmatrix}$$

   $$\sigma(A)\,\sigma(B) = \begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb' + dd' & -ab' - bd' \\ -ca' - dc' & aa' + bc' \end{pmatrix}$$

   $\boxed{\forall\, A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \sigma(A\,B) = \sigma(B)\,\sigma(A)}$

   (b) Avec les mêmes notations, calculons le produit $A\,\sigma(A)$:

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $\boxed{\forall\, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad A\,\sigma(A) = \mathrm{Det}(A)\; I}$

1. Attention : dans la partie **II**, cet ensemble est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il est alors de dimension 8.

(c) Si A est inversible, alors il existe une matrice inverse B telle que $A\,B = I$ (voir [2]).

Comme $\sigma(I) = I$, en utilisant le résultat de la question **2-a** il vient

$$\sigma(A\,B) = \sigma(I) \Rightarrow \sigma(B)\,\sigma(A) = I \Rightarrow \sigma(B) = \big(\sigma(A)\big)^{-1}$$

$$\boxed{A \text{ inversible} \Rightarrow \sigma(A) \text{ inversible et } \sigma(A^{-1}) = \big(\sigma(A)\big)^{-1}}$$

3. (a) La linéarité de $\tau : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to a + d$ est immédiate.

$\tau : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est donc bien une $\boxed{\text{forme linéaire du } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel } \mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$

(b) Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nous avons

$$A + \sigma(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\boxed{\forall\, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : \quad \sigma(A) = -A + \tau(A)\,I}$

Partie -II-

$$M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad H = \left\{M(z_1, z_2) \;—\; (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

4. (a) En notant $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$, $(x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned} M(z_1, z_2) &= \begin{pmatrix} x_1 + i\,y_1 & -x_2 + i\,y_2 \\ x_2 + i\,y_2 & x_1 - i\,y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= x_1\,I + x_2\,J - y_1\,L + y_2\,K \end{aligned}$$

d'où l'existence de la décomposition indiquée.

L'unicité de cette décomposition vient du fait que la famille (I, J, K, L) est libre [3] dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En effet, nous savons déjà que, pour tous complexes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, $\alpha\,I + \beta\,J + \gamma\,K + \delta\,L = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Cette implication est donc forcément vraie quand α,β,γ et δ sont réels.

$$\boxed{\forall\, M \in H,\ \exists!\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \quad M = \alpha\,I + \beta\,J + \gamma\,K + \delta\,L}$$

(b) Nous avons donc $H \subset \text{Vect}(I, J, K, L)$ (espace vectoriel engendré par cette famille).

Pour obtenir l'égalité, il suffit de vérifier que I, J, K et L appartiennent à H, ce qui est vrai puisque $I = M(1, 0)$, $J = M(0, -1)$, $K = M(0, i)$ et $L = M(-i, 0)$.

$$\boxed{\begin{array}{c} H \text{ est un sous-espace vectoriel du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ \text{de dimension } 4, \quad \text{de base } (I, J, K, L) \end{array}}$$

(c) On peut vérifier la stabilité par un calcul direct (qui se révèle assez rapide) :

$$M(z_1, z_2)\,M(z'_1, z'_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'_1 & -\overline{z'_2} \\ z'_2 & \overline{z'_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 z'_1 - \overline{z_2}\,z'_2 & -(z_1\,\overline{z'_2} + \overline{z_2}\,\overline{z'_1}) \\ z_2 z'_1 + \overline{z_1}\,z'_2 & -z_2\,\overline{z'_2} + \overline{z_1}\,\overline{z'_1} \end{pmatrix} = M(z_1 z'_1 - \overline{z_2}\,z'_2, z_2 z'_1 + \overline{z_1}\,z'_2)$$

$$\boxed{H \text{ est stable pour le produit matriciel}}$$

On pouvait également se contenter de vérifier que les produits deux à deux des matrices I, J, K, L sont des éléments de H. On dresse alors la table de multiplication suivante :

$*$	I	J	K	L
I	I	J	K	L
J	J	$-I$	L	$-K$
K	K	$-L$	$-I$	J
L	L	K	$-J$	$-I$

(d) Montrons que H est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $M_2(\mathbb{C})$.

H est déjà un sous-espace vectoriel, stable pour le produit.

Il reste à vérifier que l'élément unité I appartient à H, ce qui est évident.

Enfin, la table précédente montre que $J\,K \neq K\,J$.

$$\boxed{H \text{ est une } \mathbb{R}\text{-algèbre non commutative}}$$

5. (a) si $A = M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix} \in H$ alors $\sigma(A) = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} = M(\overline{z_1}, -z_2)$

et $\text{Det}(A) = z_1\,\overline{z_1} + z_2\,\overline{z_2} = \underbrace{|z_1|^2 + |z_2|^2}_{\in\mathbb{R}^+}$ $\boxed{\forall\, A \in H,\ \sigma(A) \in H \text{ et } \text{Det}(A) \in \mathbb{R}^+}$

2. On rappelle que pour les matrices il est inutile de vérifier quad $A\,B = B\,A = I$
3. Mais ce n'est pas une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui est de dimension 8.

(b) Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. D'après le calcul précédent, le déterminant de toute matrice $A = M(z_1, z_2) \in H$ n'est nul que si $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 0$, soit si $z_1 = z_2 = 0$, c'est-à-dire si $A = M(0,0) = \mathbf{0}$.

$$\boxed{\text{toute matrice non nulle de } H \text{ est inversible}}$$

D'après l'égalité $A\,\sigma(A) = \text{Det}(A)\,I$, nous avons $A\left(\frac{1}{\text{Det}(A)}\,\sigma(A)\right) = I$

donc $\boxed{\mathbf{0} \neq A \in H \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)}\,\sigma(A)}$

(c) H est stable pour le produit matriciel et $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ étant intègre, nous avons $A \neq \mathbf{0}$ et $B \neq \mathbf{0} \Rightarrow A\,B \neq \mathbf{0}$ ce qui prouve que $H\backslash\{\mathbf{0}\}$ est stable pour le produit.

De plus la matrice unité I est un élément de $H\backslash\{\mathbf{0}\}$.

Enfin, la question précédente prouve que tout élément de $H\backslash\{\mathbf{0}\}$ admet un inverse dans $H\backslash\{\mathbf{0}\}$ d'où $\boxed{\left(H\backslash\mathbf{0}\,,\,\times\right) \text{ est un groupe}}$

6. Soit deux entiers naturels sommes de quatre carrés :

$p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2\,,\; p' = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2\,,\; a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{N}$

En remarquant que
$$\begin{cases} p = |a + i\,b|^2 + |c + i\,d|^2 = \text{Det}\left(M(\underbrace{a+i\,b}_{=z_1}, \underbrace{c+i\,d}_{=z_2})\right) \\ p' = |a' + i\,b'|^2 + |c' + i\,d'|^2 = \text{Det}\left(M(\underbrace{a'+i\,b'}_{=z'_1}, \underbrace{c'+i\,d'}_{=z'_2})\right) \end{cases}$$

nous avons

$$\begin{aligned} p\,q &= \text{Det}\left(M(z_1, z_2)\right)\;\text{Det}\left(M(z'_1, z'_2)\right) = \text{Det}\left(M(z_1, z_2)\,M(z'_1, z'_2)\right) \\ &= \text{Det}\left(M(z_1 z'_1 - \overline{z_2}\,z'_2, z_2 z'_1 + \overline{z_1}\,z'_2)\right) = \text{Det}\left(M(Z_1, Z_2)\right) \end{aligned}$$

où $Z_1 = A + i\,B$ et $Z2 = C + i`\,D$ avec $A, B, C, D \in \mathbb{Z}$.

Ainsi : $p\,q = |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2$ est somme de quatre carrés d'entiers naturels

$$\boxed{\text{d'où la propriété annoncée}}$$

Partie -III-

$$(\; A \mid B \;) = \tfrac{1}{4}\,\tau\left(A\,\sigma(B) + B\,\sigma(A)\right)$$

Remarque : dans la suite, nous utiliserons la propriété $\tau(I)) = 2$ et $\tau(\lambda\,I) = 2\,\lambda$.

7. (a) A et B appartiennent à H donc $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ aussi. De plus, σ est involutive et vérifie **2-b** donc nous avons $\sigma\big(A\,\sigma(B)\big) = \sigma\big(\sigma(B)\big)\,\sigma(A) = B\,\sigma(A)$.

Ainsi, en notant $M = A\,\sigma(B)$ nous avons :

$$(\; A \mid B \;) = \frac{1}{4}\,\tau\big(M + \sigma(M)\big) = \frac{1}{4}\,\tau\Big(\tau(M)\;I\Big) = \frac{1}{2}\,\tau(M)$$

Or, $M = M(z_1, z_2) \in H$ donc $\tau(M) = z_1 + \overline{z_1} \in \mathbb{R}$ $\boxed{(\; A \mid B \;) \in \mathbb{R}}$

(b) En utilisant le calcul précédent, nous avons

$$(\; A \mid A \;) = \tfrac{1}{2}\,\tau\big(A\;\sigma(A)\big) = \tfrac{1}{2}\,\tau\big(\text{Det}(A)\;I\big) = \text{Det}(A)$$

$\boxed{(\; A \mid A \;) = \text{Det}(A)}$

(c) L'application $(A, B) \mapsto (\; A \mid B \;)$ est une application de H^2 vers $\mathbb{R}$.

— Elle est symétrique (puisque $A\,\sigma(B) + B\,\sigma(A) = B\,\sigma(A) + A\,\sigma(B)$).

— La linéarité par rapport à A découle de la linéarité de τ et de σ :

$$\begin{aligned} (\; A + \lambda\,A' \mid B \;) &= \frac{1}{4}\,\tau\Big((A + \lambda\,A')\,\sigma(B) + \underbrace{\sigma(A + \lambda\,A')}_{=\sigma(A)+\lambda\sigma(A')}\;B\Big) \\ &= \frac{1}{4}\tau\Big(A\sigma(B) + \lambda A'\sigma(B) + \sigma(A)B + \lambda\sigma(A')B\Big) \\ &= \frac{1}{4}\tau\Big(A\sigma(B) + \sigma(A)B\Big) + \frac{1}{4}\tau\Big(\lambda A'\sigma(B) + \lambda\sigma(A')B\Big) \\ &= (\; A \mid B \;) + \lambda\;(\; A' \mid B \;) \end{aligned}$$

La symétrie donne la linéarité par rapport à B.

— Nous avons vu que $(\; A \mid A \;) = \text{Det}(A)$ et si $A \in H$, $\text{Det}(A) \in \mathbb{R}^+$ donc $\text{Det}(A, A) \geqslant 0$.

— Enfin, avec les mêmes notations :

$$(\; A \mid A \;) = 0 \Rightarrow \text{Det}(A) = 0 \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0 \Rightarrow A = \mathbf{0}$$

$$\boxed{(\; \cdot \mid \cdot \;) \text{ est un produit scalaire sur } H}$$

8. (I, J, K, L) est une base de H. Pour vérifier qu'elle est orthonormée, il suffit de calculer les quatre carrés scalaires et les 6 produits scalaires. On peut utiliser la table de multiplication précédente (avec $\sigma(I) = I$, $\sigma(j) = -J$, $\sigma(K) = -K$ et $\sigma(L) = -L$).

— $(\; I \mid I \;) = \frac{1}{4}\,\tau(I + I) = 1$ et $(\; J \mid J \;) = \frac{1}{4}\,\tau(-2J^2) = \frac{1}{4}\,\tau(2I) = 1$

$(\; K \mid K \;) = \frac{1}{4}\,\tau(-2K^2) = \frac{1}{4}\,\tau(2I) = 1$ et $(\; L \mid L \;) = \frac{1}{4}\,\tau(-2L^2) = \frac{1}{4}\,\tau(2I) = 1$

— $(\; I \mid J \;) = \frac{1}{4}\,\tau\big(I(-J) + I\,J\big) = \frac{1}{4}\,\tau(\mathbf{0}) = 0$, et de même

$$(\; I \mid K \;) = (\; I \mid L \;) = (\; J \mid K \;) = (\; J \mid L \;) = (\; K \mid L \;) = 0$$

$$\boxed{(I, J, K, L) \text{ est une base orthonormée de } H}$$

9. $F = \{A \in H \text{ — } \tau(A) = 0\}$
   (a) τ étant une forme linéaire non nulle sur H, son noyau est un hyperplan de H.
   CONCLUSION $\boxed{F \text{ est un hyperplan de } H}$

   Caractérisons les matrices de F :
   $$A = M(z_1, z_2) \in F \Leftrightarrow \tau(A) = 0 \Leftrightarrow z_1 + \overline{z_1} \in F \Leftrightarrow z_1 \in i\,\mathbb{R}$$
   Ainsi, avec $z_1 = i\,b,\ z_2 = c + i\,d,\ b, c, d \in \mathbb{R}$
   $$A = \begin{pmatrix} i\,b & -c + i\,d \\ c + i\,d & -i\,b \end{pmatrix} = -b\,L + c\,J + d\,K$$
   $$\boxed{\text{une base de } F \text{ est } (J, K, L)}$$

   (b) Comme $\big(I\,,\ \underbrace{J\,,\ K\,,\ L}_{\text{base de } F}\big)$ est une base orthonormée de H,
   il est immédiat que $\boxed{H^\perp = \mathrm{Vect}(I)}$

   (c) Soit le vecteur $A = \underbrace{a\,I}_{\in F^\perp} + \underbrace{b\,J + c\,K + d\,L}_{=\,B\,\in F} \in H$. Sa projection orthogonale sur F est donc $\pi(A) = B = b\,J + c\,K + d\,L = A - a\,I$.
   Notons que $B + \sigma(B) = \tau(B)\,I = \mathbf{0}$ (car $B \in F = \mathrm{Ker}\,(\tau)$), donc $\sigma(B) = -B$.
   Par linéarité : $\begin{cases} A & = a\,I + B \\ \sigma(A) & = a\,\sigma(I) + \sigma(B) \quad = a\,I - B \end{cases} \Rightarrow A + \sigma(A) = 2\,a\,I$
   Finalement : $B = A - a\,I = A - \frac{1}{2}\,(A + \sigma(A))$ soit
   $$\boxed{\pi(A) = \tfrac{1}{2}\,\big(A - \sigma(A)\big)}$$

   Note : ce résultat est naturel puisque π et σ sont les projections et la symétrie de même base et direction, donc $\mathrm{Id} + \sigma = 2\,\pi$