

# Devoir Surveillé 11

Le vendredi 12 Juin 2026

14h-17h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

**L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.**

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

## Exercice 1

$T$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  de réels solutions du système d'inéquations

$$x \geq \frac{1}{4} \quad y \geq \frac{1}{4} \quad x + y \leq \frac{3}{4}$$

On note  $T'$  l' "intérieur" de  $T$  à savoir l'ensemble des couples  $(x, y)$  solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4} \quad y > \frac{1}{4} \quad x + y < \frac{3}{4}$$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $T$  par :  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y}$

- 1) Représenter sur un même graphique  $T$  et  $T'$ .
- 2) On admet que  $T'$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
  - a : Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur  $T'$  de la fonction  $f$ .
  - b : Montrer que  $f$  n'admet pas d'extremum local (et donc a fortiori absolu) sur  $T'$ .
- 3) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple  $(x, y)$  de  $T$  :

$$2 \leq f(x, y) \leq \frac{16}{3}$$

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion  $p$ ), des boules rouges (en proportion  $r$ ) et des boules vertes (en proportion  $u$ ).

On suppose que  $p \geq \frac{1}{4}$   $r \geq \frac{1}{4}$   $u \geq \frac{1}{4}$  et que  $p + r + u = 1$ .

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages.

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on note  $B_n$  (respectivement  $R_n, V_n$ ) l'événement : "Tirer une boule blanche (respectivement rouge, verte) au  $n^{\text{ième}}$  tirage".

On appelle  $X$  (resp  $Y$ ) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge).

On définit alors la variable  $D = |X - Y|$  égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

- 4) Déterminer la loi de  $X$ . Faire de même pour  $Y$ .
- 5) Soit  $i$  et  $j$  des entiers naturels non nuls. En distinguant les cas  $i = j$ ,  $i < j$  et  $i > j$ , exprimer l'événement  $(X = i) \cap (Y = j)$  à l'aide des événements décrits dans l'énoncé. En déduire la loi du couple  $(X, Y)$ .
- 6) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- 7) Soit  $k$  un entier naturel non nul, montrer l'égalité :

$$P(D = k) = \frac{pr}{p+r} [(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}]$$

- 8) En admettant que  $D$  admette une espérance, montrer que  $E(D)$  qui est la somme de la série de terme général  $(k \times P(D = k))$  vaut  $f(p, r)$ . Encadrer alors  $E(D)$ .

### Exercice 2

LES PARTIES **A**, **B** ET **C** PEUVENT ÊTRE TRAITÉES INDÉPENDAMMENT, MAIS IL SERA JUDICIEUX D'UTILISER LES LIENS ENTRE CES DIFFÉRENTES PARTIES.

#### Partie -A-

On note  $\mathbb{R}_2[X]$  l'algèbre des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. A tout élément  $P$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  on fait correspondre le polynôme  $\varphi(P)$  tel que :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme  $\varphi$  d'espace vectoriel dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Écrire la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans la base canonique  $(1, X, X^2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
3. Déterminer l'image et le noyau de  $\varphi$ .
4. On note  $\text{Id}$  l'identité dans  $\mathbb{R}_2[X]$  et on considère un nombre réel  $\lambda$ .
  - (a) Montrer que  $(\varphi - \lambda \text{Id})$  est bijectif, sauf pour un nombre fini de valeurs de  $\lambda$  que l'on précisera.
  - (b) On appelle  $\delta$  la plus grande des valeurs trouvées à la question précédente. Déterminer le noyau de  $(\varphi - \delta \text{Id})$ .

#### Partie -B-

On désigne par  $I$  l'intervalle réel  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , et on considère sur  $I$  l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad (x^2 - 1)y'' + 2xy' - 6y = 0$$

1. Déterminer les fonctions polynômes solution de  $(\mathcal{E})$ . On pourra d'abord montrer que si un polynôme est solution alors il est de degré au plus 2.
2. Soit  $K$  la fonction polynôme solution de  $(\mathcal{E})$  vérifiant  $K(0) = 1$ .

On définit la fonction  $f$  sur  $I$  par :  $\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)K^2(x)}$ .

On appelle  $F$  la primitive de  $f$  s'annulant en 0.

- (a) Montrer que la fonction  $KF$  est solution de  $(\mathcal{E})$ .
- (b) Expliciter  $F$ .
3. Sachant que l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de  $(\mathcal{E})$  constitue un espace vectoriel de dimension 2, déterminer  $\mathcal{S}$ .

**Partie -C-**

Soit  $d$  un entier strictement positif et soient  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d$  des nombres réels deux à deux distincts et différents de  $-1$  et de  $+1$ . On considère le polynôme  $L$  tel que  $L(X) = \prod_{k=1}^d (X - \tau_k)$ , et la fraction rationnelle  $R$  telle que  $R(X) = \frac{1}{(X^2 - 1)L^2(X)}$ .

On sait qu'il existe  $(2d+2)$  nombres réels  $\alpha, \beta, A_1, A_2, \dots, A_d, B_1, B_2, \dots, B_d$  tels que :

$$R(X) = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \sum_{k=1}^d \frac{A_k}{(X-\tau_k)^2} + \sum_{k=1}^d \frac{B_k}{(X-\tau_k)}$$

1. Calculer  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $L(1)$  et  $L(-1)$ .
2. Exprimer  $A_k$  en fonction de  $\tau_k$  et de  $L'(\tau_k)$ .
3. Exprimer  $B_k$  en fonction de  $\tau_k$ , de  $L'(\tau_k)$  et de  $L''(\tau_k)$ .
4. On définit le polynôme  $S$  par :  $S(X) = (X^2 - 1)L''(X) + 2XL'(X)$ .  
Prouver l'équivalence :  $(\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, B_k = 0) \Leftrightarrow (\exists \mu \in \mathbb{R} \ S = \mu L)$  et exprimer  $\mu$ , quand il existe, en fonction de  $d$ .
5. Dans le cas où  $d$  est égal à 2, déterminer le polynôme  $L$  tel que :  $\forall k \in \{1, 2\}, B_k = 0$ .

**Exercice 3**

$\mathbb{R}$  désigne le corps des nombres réels et  $\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

On pose :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  et  $L = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ .

On notera bien que  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  est muni de sa structure de  $\mathbb{C}$ -algèbre.

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  on pose :  $\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  et  $\tau(A) = a + d$ .

1. (a) Montrer que  $\sigma$  est une symétrie du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .  
(b) Établir que  $(I, J, K, L)$  est une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  puis donner la matrice de l'endomorphisme  $\sigma$  dans cette base.
2. On considère  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .  
(a) Montrer que :  $\sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A)$ .  
(b) Justifier l'égalité :  $A\sigma(A) = (ad - bc)I$ .  
(c) Montrer que si  $A$  est inversible alors  $\sigma(A)$  l'est aussi.  
Exprimer les matrices  $\sigma(A)^{-1}$  et  $\sigma(A^{-1})$  en fonction de  $A$ .
3. (a) Vérifier que  $\tau$  est une forme linéaire sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .  
(b) Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Exprimer  $\sigma(A)$  à l'aide des matrices  $A, I$  et du complexe  $\tau(A)$ .

**On notera bien, que dans toute cette partie,  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  est muni de sa structure de  $\mathbb{R}$ -algèbre.**

Pour  $A$  et  $B$  dans  $H$  on pose :  $(A | B) = \frac{1}{4} \tau(A\sigma(B) + B\sigma(A))$

4. On considère  $A$  et  $B$  dans  $H$ .  
(a) Prouver que  $(A | B) \in \mathbb{R}$ . On pourra utiliser les questions **2-a** et **5-a**.  
(b) Montrer que  $(A | A) = \text{Det}(A)$ .  
(c) Établir que  $(. | .)$  est un produit scalaire sur le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $H$ .
5. Vérifier que  $(I, J, K, L)$  est une base orthonormale de  $H$ .