Devoir Surveillé 10

Le mardi 7 Mai 2024

8h-12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt$$

1. Prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etudier sa parité.
2. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ admet une infinité de maximums relatifs [respectivement de minimums relatifs] en des points que l'on peut représenter par les termes d'une suite strictement croissante $\left(x_n\right)_{n\geqslant 1}$ [respectivement $\left(y_n\right)_{n\geqslant 1}$].

$$\text{On pose :} \qquad \forall\ n\ \geqslant 1 \quad a_n = f(x_n) \quad \text{et} \quad b_n = f(y_n).$$

3. Montrer que les suites $\left(a_n\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(b_n\right)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
4. En déduire que $f(x)$ admet une limite finie l quand x tend vers $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer cette limite).
5. Soit k un entier strictement positif. On partage l'intervalle $\left[0; \sqrt{\pi}\right]$ en k intervalles de même longueur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{k}$ et l'on pose : $\qquad \forall\ i \in \left\{0, 1, \cdots, k\right\} \quad \alpha_i = \dfrac{i\sqrt{\pi}}{k}$.

   On a alors : $\qquad \int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\, dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(t)\, dt.$

   On pose, pour tout i de $\left\{0, 1, \cdots, k-1\right\}$, $\beta_i = \dfrac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}$ et l'on se propose de prendre comme valeur approchée de $\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\, dt$ l'intégrale $I(k)$ telle que $I(k) = \int_0^{\sqrt{\pi}} \varphi(t)\, dt$, où φ est la fonction en escalier telle que :

$$\begin{cases} \forall\ i \in \left\{0, 1, \cdots, k-1\right\} \quad \forall\ t \in \left[\alpha_i; \alpha_{i+1}\right[\quad \varphi(t) = g(\beta_i) \\ \varphi\left(\sqrt{\pi}\right) = g\left(\sqrt{\pi}\right) \end{cases}$$

   (a) Exprimer $I(k)$ en fonction de k et des nombres β_i

   (b) Justifier, pour tout i de $\left\{0, 1, \cdots, k-1\right\}$ l'égalité :

$$\forall\ t \in \left[\alpha_i; \alpha_{i+1}\right] \quad g(t) = g(\beta_i) + \left(t - \beta_i\right) g'\left(\beta_i\right) + \int_{\beta_i}^{t} (t-u) g''(u)\, du$$

Exercice 2
Partie -I-

Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $D : f \in E \mapsto f'$. Il est clair que D est un endomorphisme de E.

1. Déterminer le noyau et l'image de D.

   Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2}$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}$.
   Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.
   Nous allons montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de E.
   Soient a, b et c des réels tels que $a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3$ soit la fonction nulle.

2. L'étudiante Antoinette observe que $a\,f_1(t) + b\,f_2(t) + c\,f_3(t) = 0$ pour tout réel t. Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t, obtient un système de trois équations aux trois inconnues a, b et c, qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure. Faites comme elle !
3. L'étudiante Lucie propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3$ au voisinage de 0. Faites comme elle !
4. L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de $a\,f_1(t) + b\,f_2(t) + c\,f_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Faites comme elle !

   La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G, et ce sous-espace est de dimension 3.

5. Montrer que G est stable par D.

   Nous noterons $\widehat{D}$ l'endomorphisme de G induit par D.

6. Déterminez la matrice M de $\widehat{D}$ dans la base $\mathcal{B}$.
7. Calculez M^3.
8. Montrez que M est inversible, et explicitez son inverse M^{-1}.
9. Montrez que $\widehat{D}$ est un automorphisme de G.
10. Exprimez $(\widehat{D})^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.

Partie -II-

Soient g et h deux éléments de D. Définissons $\varphi(g,h) = g(0)h(0) + g'(0)h'(0) + g''(0)h''(0)$.

11. Dressez un tableau à trois lignes et quatre colonnes ; pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, la ligne i présentera les valeurs de i, $f_i(0)$, $f_i'(0)$, $f_i''(0)$ dans cet ordre. Vous ne ferez pas apparaître les détails des calculs sur votre copie.
12. Montrez que φ est un produit scalaire sur G.
13. La base $\mathcal{B}$ est-elle orthogonale ?
14. La base $\mathcal{B}$ est-elle orthonormée ?

Partie -III-

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons $(\mathcal{E})$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})$ est une fonction f définie et trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

15. Montrez que toute solution f de $(\mathcal{E})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

16. Montrez que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(\mathcal{E})$.

Notons $T = D^3 - \mathrm{Id}$, où Id est l'identité de E, et $D^3 = D \circ D \circ D$.
Le noyau de T est donc l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

17. Montrez que G est contenu dans le noyau de T.

Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi, G sera exactement l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.
Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; nous noterons $g = f'' + f' + f$.

18. Montrez que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
19. Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.
20. Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.
21. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda\, e^t$.
22. Et maintenant, concluez !