Devoir Surveillé 10 - Eléments de Correction

Exercice 1
Partie -I-

1. $\mathrm{Ker}\,(D)$ est l'ensemble des fonctions constantes, et $\mathrm{Im}\,(D) = E$.
2. choisir trois valeurs astucieuses de t (par exemple 0 et $\pm\frac{\pi}{\sqrt{3}}$)
3. On forme le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $(a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3)(t)$ (voir [1]). L'unicité du DL conduit a un système dont l'unique solution est $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.
4. Si $g = af_1 + bf_2 + cf_3 = \mathbf{0}$ (fonction nulle), sa limite en l'infini est nulle. Pour la calculer, on commence par factoriser par "le terme le plus fort" (les autres sont négligeables devant lui). On en déduit qu'un des coefficients est nul, puis en recommence avec ce qui reste.
5. Immédiat (par linéarité de la dérivation) : il suffit de calculer $D(f_1), D(f_2)$ et $D(f_3)$.
6. Le calcul précédent donne immédiatement la matrice [2].
   Note : on reconnaît la matrice d'une rotation d'axe f_1 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
7. On trouve $M^3 = I_3$ (matrice unité, ce qui confirme la note précédente).
8. On en déduit que $M^{-1} = M^2$.
9. $\widehat{D} : G \to G$ est linéaire bijective.
10. D'après **(8)** : $\widehat{D}^{-1} = \widehat{D}^{2} : f \mapsto f''$.

Partie -II-

11. Calcul élémentaire :

i	$f_i(0)$	$f_i'(0)$	$f_i''(0)$
1	1	1	1
2	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
3	1	$-1/2$	$-1/2$

12. Un calcul simple (sans mettre les fonctions sous la forme $af_1 + bf_2 + cf_3$) montre que $\varphi(\lambda g_1 + g_2, h) = \lambda\varphi(g_1, h) + \varphi(g_2, h)$ (la linéarité par rapport à la première fonction), puis la symétrie, puis la positivité ($\varphi(g, g) \geqslant 0$). Enfin, en mettant g sous la forme $g = af_1 + bf_2 + cf_3$, on montre $\varphi(g, g) = 0 \Rightarrow g = \mathbf{0}$.
13. Toujours en exploitant le tableau (**11**), pour $i \neq j$, on calcule $\varphi(f_i, f_j)$. On trouve 0 donc $\mathcal{B}$ est orthogonale.
14. Mais $\varphi(f_1, f_1) = 3 \neq 1$ donc $\mathcal{B}$ n'est pas orthonormée.

Partie -III-

15. Classique : f solution est trois fois dérivable donc est de classe $\mathcal{C}^2$. Mais alors $f''' = f$ montre que f est de classe $\mathcal{C}^5$. On généralise par récurrence.
16. Si f polynomiale non nulle est solution, regarder les degrés des deux membres.
17. $\mathrm{Ker}\,(T)$ est un **SEV** de E. Pour qu'il contienne G, il faut et il suffit que f_1, f_2 et f_3 soient solutions de $(\mathcal{E})$ $\big(T(f_i) = \widehat{D}^{3}(f_i) - f_i = \mathbf{0}\big)$
18. Vérification immédiate (avec $f''' = f$).
19. Equation linéaire sans second membre. On trouve $\mathrm{Vect}(f_1)$
20. Equation linéaire du second ordre à coefficients constants (sans second membre). On trouve $\mathrm{Vect}(f_2, f_3)$.
21. Le plus simple est de chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto \alpha\, e^t$.
22. Regrouper les résultats (**18**),(**19**) et (**21**).

---

1. On trouve $(a + c) + \big(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\big)t + \big(\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4}\big)t^2 + o(t^2)$
2. On trouve $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.