

Devoir Surveillé 10 - Eléments de Correction

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0; 1]$ par

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad \forall t \in]0; 1[, f(t) = \frac{t-1}{\ln t}$$

$$1. \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \Rightarrow \ln t \underset{1}{\sim} t-1 \Rightarrow f(t) \underset{1}{\sim} 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = 1 = f(1)$$

ainsi f est continue en 1.

$\lim_{t \rightarrow 0} \ln(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} t-1 = -1$ alors $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0 = f(0)$ ainsi f est continue en 0.

De plus f est continue sur $]0; 1[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0; 1[$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]0; 1[$.

Conclusion : f est continue sur $[0; 1]$

$$\text{On pose alors : } I = \int_0^1 f(t) dt$$

$$2. \text{ Pour tout élément } x \text{ de }]0; 1], \text{ on pose } I(x) = \int_x^1 f(t) dt \text{ et } J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$$

$$(a) J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt \Rightarrow -J(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur $]0; 1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0; 1]$ avec un dénominateur ne s'annulant pas sur $]0; 1]$. Alors $-J$ est dérivable sur $]0; 1]$ en tant que primitive d'une fonction continue sur $]0; 1]$ et on a $\forall x \in]0; 1], -J'(x) = \frac{f(x)}{x}$

$$J(x^2) = \int_{x^2}^1 \frac{f(t)}{t} dt \Rightarrow -J(x^2) = \int_1^{x^2} \frac{f(t)}{t} dt$$

La fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $]0; 1]$ à valeurs dans $]0; 1]$. Ainsi $\forall x \in]0; 1], [x^2; 1] \subset]0; 1]$. Ainsi la fonction $x \mapsto J(x^2)$ est dérivable sur $]0; 1]$ et

$$\text{on a } \forall x \in]0; 1], \left(\int_1^{x^2} \frac{f(t)}{t} dt \right)' = \frac{f(x^2)}{x^2} \times 2x$$

Conclusion : la fonction K définie sur $]0; 1]$ par : $K(x) = J(x^2) - J(x)$ est dérivable sur $]0; 1]$ et

$$\forall x \in]0; 1], K'(x) = \frac{1}{x} [f(x) - 2f(x^2)]$$

$$(b) \forall x \in]0; 1[, f(x) - 2f(x^2) = \frac{x-1}{\ln x} - 2\frac{x^2-1}{\ln x^2} = \frac{x-1}{\ln x} [1 - (x+1)] = -xf(x)$$

de plus $f(1) - 2f(1^2) = -1 = -1f(1)$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in]0; 1], f(x) - 2f(x^2) = -xf(x).$$

$$(c) \text{ Ainsi, } \forall x \in]0; 1[, K'(x) = -f(x) \Rightarrow K(x) = -\int_1^x f(t) dt = I(x)$$

d'où $I(x) = J(x^2) - J(x) = \int_{x^2}^1 \frac{f(t)}{t} dt - \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{x^2}^x \frac{f(t)}{t} dt$ d'après la relation de Chasles.

$$\text{Conclusion : } \forall x \in]0; 1[, I(x) = \int_{x^2}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt$$

$$3. \int_{x^2}^x \frac{-1}{t \ln t} dt = [-\ln |\ln t|]_{x^2}^x = -\ln |\ln x| + \ln |\ln x^2| = -\ln |\ln x| + \ln |2 \ln x| = \ln 2$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in]0; 1[, \int_{x^2}^x \frac{-1}{t \ln t} dt = \ln 2$$

$$4. \forall x \in]0; 1[, \forall t \in]0; x[, \left| \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \right| = \int_{x^2}^x \frac{-1}{\ln t} dt \text{ par positivité de l'intégrale car } \frac{-1}{\ln t} \geq 0$$

$\forall x \in]0; 1[, \forall t \in]0; x[, t \leq x \Rightarrow \ln t \leq \ln x$ car la fonction \ln est croissante sur $]0; +\infty[$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{\ln x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\ln t} \leq -\frac{1}{\ln x}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in]0; 1[, \forall t \in]0; x[: 0 \leq \frac{-1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}$$

$$\forall x \in]0; 1[, \forall t \in]0; x[: -\frac{1}{\ln t} \leq -\frac{1}{\ln x} \Rightarrow \int_{x^2}^x \frac{-1}{\ln t} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{-1}{\ln x} dt \text{ par croissance de l'intégrale}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \right| \leq \frac{-(x-x^2)}{\ln x} = \frac{-x(1-x)}{\ln x} \leq \frac{-x}{\ln x}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in]0; 1[, 0 \leq \left| \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \right| \leq \frac{-x}{\ln x}$$

$$5. \forall x \in]0; 1[, I(x) = \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt - \int_{x^2}^x \frac{1}{t \ln t} dt = \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt - \ln 2 \Rightarrow |I(x) - \ln 2| =$$

$$\left| \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \right|$$

or on a vu que $\forall x \in]0; 1[, 0 \leq \left| \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \right| \leq \frac{-x}{\ln x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = 0$ alors par théorème d'encadrement $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln t} dt \right|$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} I(x) = \ln 2}$

6. $\forall x \in]0; 1] : I - I(x) = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$ d'après la relation de Chasles.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]0; 1] : I - I(x) = \int_0^x f(t)dt}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(t)dt = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} I - I(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} I(x) = I$

ainsi d'après la question 5 , $\boxed{I = \ln 2}$

Exercice 2
Partie A

1. En effectuant ces tirages sans remise, on crée une bijection entre les deux jeux de n cartes.
Il y a $n!$ bijections possibles, et seulement une qui correspond à la reconstitution des n paires d'animaux.

Par équiprobabilité, la probabilité que les n paires d'animaux soient reconstituées est $\frac{1}{n!}$.

2. Si k paires d'animaux au moins sont reconstituées, alors il existe une bijection entre deux jeux composés chacun des $n - k$ autres figurines restantes.
Il existe $(n - k)!$ bijections entre des ensembles à $n - k$ éléments.

Ainsi la probabilité qu'au moins ces k paires d'animaux soient reconstituées est $\frac{(n-k)!}{n!}$.

3. Supposons que les cartes sont numérotées. Notons A_i l'événement "la paire d'animal i est reconstituée".
L'événement "aucune figurine n'est reconstituée" est l'événement contraire de $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

Et d'après la formule du crible $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$.

Or d'après la question précédente, $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$.

Ainsi $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} 1$.

Or $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} 1$ est le cardinal de l'ensemble des k -uplets d'entiers ordonnés compris entre 1 et n .

Donc $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} 1 = \binom{n}{k}$.

Ainsi $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$.

Or $p_n = 1 - P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$.

$\boxed{\text{Ainsi } p_n = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}}$

4. On reconnaît dans $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ la somme partielle de la série exponentielle $\sum \frac{(-1)^k}{k!}$.

$\boxed{\text{Ainsi la suite } (p_n)_{n \geq 1} \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}}$

Partie B

1. Si l'urne ne contient qu'une paire de cartes, alors la probabilité de reconstituer cette paire en un seul tour est 1.

$\boxed{\text{Ainsi la variable aléatoire } T_1 \text{ est la variable aléatoire certaine égale à } 1. \text{ Donc } P(T_1 = 1)}$

2. Il faut au moins n tours pour reconstituer les n paires de figurines.

$\boxed{\text{Donc } T_n(\Omega) = [n, +\infty[}$

(a) Si au tour i pour la première fois, une paire d'animaux est reconstituée, il restera pour le tour suivant que deux cartes dans l'urne ; à ce tour-là donc l'urne est vidée.

$\text{Ainsi } (T_2 = k) = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \dots \cap \overline{C_{k-2}} \cap C_{k-1} \cap C_k$.

Et par la formule des probabilités composées,

$P(T_2 = k) = P(\overline{C_1})P(\overline{C_2} | \overline{C_1}) \dots P(\overline{C_{k-2}} | \overline{C_1} \cap \dots \cap \overline{C_{k-3}})P(C_{k-1} | \overline{C_1} \cap \dots \cap \overline{C_{k-2}})P(C_k | \overline{C_1} \cap \dots \cap \overline{C_{k-2}} \cap C_{k-1})$.

L'urne contient 4 cartes tant qu'aucune paire n'est retirée. Il y a alors 2 paires d'animaux recomposées et $\binom{4}{2} = 6$ paires possibles.

$\boxed{\text{Ainsi } \forall k \in [2, +\infty[; P(T_2 = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}}$

(b) La série de terme général $k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée de raison $\frac{2}{3}$ qui converge car $\frac{2}{3} < 1$. Et $\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = 9$.

Donc T_2 admet une espérance et $E(T_2) = \frac{1}{3} \frac{3}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}(9-1) = 4$.

Ainsi T_2 admet une espérance et $E(T_2) = 4$.

4. (a) $(T_3 = 3) = C_1 \cap C_2 \cap C_3$.

Alors $P(T_3 = 3) = P(C_1)P(C_2 \setminus C_1)P(C_3 \setminus C_1 \cap C_2) = \frac{3}{\binom{6}{2}} \frac{2}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{15}$.

$(T_3 = 4) = (\overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) \cup (C_1 \cap \overline{C_2} \cap C_3 \cap C_4)$.

Alors par incompatibilité des événements, $P(T_3 = 4) = \left(1 - \frac{3}{\binom{6}{2}}\right) \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \left(1 - \frac{2}{\binom{4}{2}}\right) \frac{2}{225}$.

$$\left(\frac{2}{\binom{4}{2}}\right) \frac{2}{\binom{4}{2}} = \frac{22}{225}$$

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(C_1, \overline{C_1})$,

$$P(T_3 = 5) = P((T_3 = 5) \setminus C_1)P(C_1) + P((T_3 = 5) \setminus \overline{C_1})P(\overline{C_1})$$

Or $P((T_3 = 5) \setminus C_1) = P(T_2 = 4)$ et $P((T_3 = 5) \setminus \overline{C_1}) = P(T_3 = 4)$.

Donc $P(T_3 = 5) = \frac{1}{3} \frac{4}{9} \frac{3}{\binom{6}{2}} + \frac{22}{225} \left(1 - \frac{3}{\binom{6}{2}}\right) = \frac{4 \times 91}{3^3 \cdot 5^3} = \frac{364}{3375}$.

(b) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(C_1, \overline{C_1})$,

$$P(T_n = k + 1) = P((T_n = k + 1) \setminus C_1)P(C_1) + P((T_n = k + 1) \setminus \overline{C_1})P(\overline{C_1})$$

Or $P((T_n = k + 1) \setminus C_1) = P(T_{n-1} = k)$ et $P((T_n = k + 1) \setminus \overline{C_1}) = P(T_n = k)$.

Et $P(C_1) = \frac{n}{\binom{2n}{2}}$.

Donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout $k \geq n - 1$,

$$P(T_n = k + 1) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} P(T_{n-1} = k) + \frac{\binom{2n}{2} - n}{\binom{2n}{2}} P(T_n = k)$$

(c) On admet dans cette question que pour tout entier non nul n , T_n admet une espérance.

$$\sum_{k=n-1}^{+\infty} k P(T_n = k + 1) = \frac{n}{\binom{2n}{2}} \sum_{k=n-1}^{+\infty} k P(T_{n-1} = k) +$$

$$\frac{\binom{2n}{n} - n}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n-1}^{+\infty} k P(T_n = k)$$

Or $E(T_n) = \sum_{k=n-1}^{+\infty} (k + 1) P(T_n = k + 1) = \sum_{k=n-1}^{+\infty} k P(T_n = k + 1) + \sum_{k=n-1}^{+\infty} P(T_n = k + 1)$.

Et $T_n(\Omega) = [n, +\infty[$, donc $\sum_{k=n-1}^{+\infty} P(T_n = k + 1) = 1$.

Alors $E(T_n) - 1 = \frac{1}{2n-1} E(T_{n-1}) + \frac{2(n-1)}{2n-1} E(T_n)$. Ainsi $E(T_n) = E(T_{n-1}) + 2n - 1$.

Alors $E(T_n) = \sum_{k=2}^n 2k - 1 + E(T_1) = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) - n + 1 + 1$.

Ainsi $E(T_n) = n^2$.

Exercice 3

Partie I : un exemple

$$1. \begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ 4P_1 + 9P_2 = A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5P_1 = 9I_3 - A \\ 5P_2 = A - 4I_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{1}{5}(9I_3 - A) \\ P_2 = \frac{1}{5}(A - 4I_3) \end{cases}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) $P_1^2 = P_1$, $P_1 P_2 = 0_3$, $P_2 P_1 = 0_3$ et $P_2^2 = P_2$.

(b) Comme les matrices $4P_1$ et $9P_2$ commutent, la formule du binôme donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 4^i P_1^i 9^{k-i} P_2^{k-i}$$

$$A^k = 4^k P_1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} 4^i 9^{k-i} P_1^i P_2^{k-i}}_{=0} + 9^k P_2$$

car en raison de 2(a) : $\forall i \geq 1, \forall j \geq 1, P_1^i = P_1, P_1^i P_2^j = 0, P_2^j = P_2$.

3. Avec $B = 2P_1 + 3P_2$, $B^2 = 4P_1^2 + 12P_1 P_2 + 9P_2^2$ puisque P_1 et P_2 commutent. Donc $B^2 = 4P_1 + 9P_2 = A$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ vérifie } B^2 = A.$$

Partie II : Étude des puissances de f

4. Soit $P = \sum_{i=0}^m a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_m[X]$.

$$\begin{aligned} P(f) &= \sum_{k=0}^m a_k f^k \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{i=1}^m a_k \lambda_i^k p_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^m a_k \lambda_i^k p_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=0}^m a_k \lambda_i^k \right) p_i \end{aligned}$$

$$P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$$

5. $N(f) = \sum_{i=1}^m N(\lambda_i) p_i = \sum_{i=1}^m 0 p_i = \tilde{0}$ puisque les λ_i sont les racines de N .

$$N(f) = \tilde{0}$$

6. (a) Soit $(i, j) \in \llbracket 1; m \rrbracket^2$.

Si $i \neq j$, λ_j est une racine de M_i donc $L_i(\lambda_j) = 0$ par définition de L_i .

$$\text{Si } i = j, L_i(\lambda_j) = L_i(\lambda_i) = \frac{M_i(\lambda_i)}{M_i'(\lambda_i)} = 1.$$

(b) Soit $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$. $L_i(f) = \sum_{j=1}^m L_i(\lambda_j) p_j = L_i(\lambda_i) p_i + \underbrace{\sum_{j \neq i} L_i(\lambda_j) p_j}_{= \tilde{0}} = p_i$.

7. (a) $e = f^0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 p_i = \sum_{i=1}^m p_i$.

(b) • Soit $u \in E$. $u = e(u) = \sum_{i=1}^m p_i(u)$ avec $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $p_i(u) \in Im(p_i)$.

Donc $u \in \sum_{i=1}^m Im(p_i)$, et ainsi $E \subset \sum_{i=1}^m Im(p_i)$.

• Réciproquement, comme $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $Im(p_i) \subset E$, on a $\sum_{i=1}^m Im(p_i) \subset E$.

$$\text{Par double inclusion, } E = \sum_{i=1}^m Im(p_i).$$

8. (a) $M_i(\lambda_i)(X - \lambda_i)L_i = (X - \lambda_i)M_i = (X - \lambda_i) \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j) = N$.

(b) Par 6. et 7.b et 9.a : $\tilde{0} = N(f) = M_i(\lambda_i)(f - \lambda_i e)L_i(f) = M_i(\lambda_i)(f - \lambda_i e)p_i$.

Soit $v \in Im(p_i)$. Alors il existe $u \in E$ tel que $v = p_i(u)$.

$$(f - \lambda_i e)(v) = (f - \lambda_i e)p_i(u) = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} \tilde{0}(u) = 0, \text{ donc } v \in Ker(f - \lambda_i e).$$

$$\text{Ainsi } Im(p_i) \subset Ker(f - \lambda_i e).$$

9. (a) On peut observer que p_i et p_j commutent car :

$$p_i \circ p_j = L_i(f) \circ L_j(f) = (L_i \times L_j)(f) = (L_j \times L_i)(f) = L_j(f) \circ L_i(f) = p_j \circ p_i.$$

Alors, pour tout u de E , $p_i \circ p_j(u) = p_j \circ p_i(u)$ donc $v = p_i \circ p_j(u) \in Im(p_i) \cap Im(p_j)$,

D'après la question précédente, $v \in Im(p_i) \subset Ker(f - \lambda_i e)$ et $v \in Im(p_j) \subset Ker(f - \lambda_j e)$.

$$\text{Donc } f(v) = \lambda_i v = \lambda_j v \text{ avec } \lambda_j \neq \lambda_i \text{ doù } v = 0 \quad \forall u \in E, p_i \circ p_j(u) = 0$$

(b) Pour tout i de $\llbracket 1; m \rrbracket$, $p_i = p_i \circ e = p_i \circ \sum_{j=1}^m p_j = \sum_{j=1}^m p_i \circ p_j = p_i \circ p_i + \tilde{0} = p_i^2$.

(c) Pour tout i de $\llbracket 1; m \rrbracket$, $p_i \circ f = p_i \circ \sum_{j=1}^m \lambda_j p_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j p_i \circ p_j = \lambda_i p_i^2 + \tilde{0} = \lambda_i p_i$.

10. • Raisonnons par récurrence, l'initialisation est assurée par les hypothèses sur f . Voyons l'hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$.

$$\text{Alors } f^{k+1} = f^k \circ f = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i \right) \circ f = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k (p_i \circ f) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{k+1} p_i.$$

Ceci achève la récurrence et : $\forall k \in \mathbb{N}, f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$.

• Le même raisonnement qu'en 5. donne cette fois :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

Partie III : Intervention de produit scalaire

11. Soit x, y et z trois vecteurs de E et μ un réel.

$$\begin{aligned} \varphi(\mu x + y, z) &= \sum_{i=1}^m (p_i(\mu x + y) \mid p_j(z)) = \sum_{i=1}^m (\mu p_i(x) + p_i(y) \mid p_j(z)) \\ \varphi(\mu x + y, z) &= \sum_{i=1}^m (\mu (p_i(x) \mid p_j(z)) + (p_i(y) \mid p_j(z))) = \mu \varphi(x, z) + \varphi(y, z) \end{aligned}$$

φ est linéaire à gauche.

φ est symétrique par symétrie du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^m (p_i(x) | p_i(x)) = \sum_{i=1}^m \|p_i(x)\|^2 \geq 0.$$

Supposons $\varphi(x, x) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^m \|p_i(x)\|^2 = 0$, donc $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, \|p_i(x)\|^2 = 0$, donc $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, p_i(x) = 0$.

Or par 8(a), $x = e(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x)$, donc $x = 0$.

Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire sur E .

12. Soit x et y deux vecteurs de E .

$$\varphi(x, f(y)) = \sum_{i=1}^m (p_i(x) | p_i(f(y))) = \sum_{i=1}^m (p_i(x) | \lambda_i p_i(y)) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (p_i(x) | p_i(y))$$

$$\varphi(f(x), y) = \sum_{i=1}^m (p_i(f(x)) | p_i(y)) = \sum_{i=1}^m (\lambda_i p_i(x) | p_i(y)) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (p_i(x) | p_i(y))$$

Donc $\varphi(x, f(y)) = \varphi(f(x), y)$, ce qui prouve que f est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire φ .

Ceci démontre à nouveau que f est diagonalisable.

13. On sait déjà, d'après 9(b), que p_i est un projecteur, sur $Im(p_i)$. Il suffit que p_i soit symétrique pour φ pour que p_i soit le projecteur orthogonal sur $Im(p_i)$, toujours pour le produit scalaire φ . Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\varphi(x, p_i(y)) = \sum_{i=1}^m (p_i(x) | p_i^2(y)) = \sum_{i=1}^m (p_i(x) | p_i(y)) = \sum_{i=1}^m (p_i^2(x) | p_i(y)) = \varphi(p_i(x), y).$$

p_i est bien symétrique pour φ : p_i est le projecteur orthogonal sur $Im(p_i) = E_{\lambda_i}$ pour le produit scalaire φ .