Devoir Surveillé 10

Le vendredi 22 mai 2026

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1
On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (f_0, f_1, f_2) est une base de E, les fonctions f_0, f_1 f_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_0(t) = 1 \quad f_1(t) = t \quad f_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x-t)\, dt$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer $(\varphi(f_0))(x)$, $(\varphi(f_1))(x)$ et $(\varphi(f_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$ et $\varphi(f_2)$ comme combinaison linéaire de f_0, f_1 et f_2.
   (c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (f_0, f_1, f_2).
   (b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

Exercice 2
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (\operatorname{sh} x)^{\frac{1}{x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. (a) Justifier que f est dérivable sur D et démontrer que pour tout réel x appartenant à D,

   $$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}\varphi(x)$$

   où φ est une fonction qu'on précisera.
   (b) Etudier les variations de φ sur D.
   (c) Montrer que la limite de φ en $+\infty$ vaut $\ln(2)$.
   (d) En déduire le signe de φ.
   (e) En déduire les variations de f sur D.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$f(0)=0 \qquad f(1)=1 \qquad \forall t \in]0;1[, f(t)=\frac{t-1}{\ln t}$$

1. Démontrer que f est continue sur $[0;1]$.

   On pose alors : $I=\int_0^1 f(t)dt$

2. Pour tout élément x de $]0;1]$, on pose $I(x)=\int_x^1 f(t)dt$ et $J(x)=\int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt$

   (on ne cherchera pas à calculer ces intégrales).

   (a) Soit K la fonction définie sur $]0;1]$ par : $K(x)=J(x^2)-J(x)$.

   Montrer que K est dérivable sur $]0;1]$ et que $\forall x \in]0;1], K'(x)=\frac{1}{x}\left[f(x)-2f(x^2)\right]$

   (b) Démontrer que : $\forall x \in]0;1], f(x)-2f(x^2)=-xf(x)$.

   (c) En déduire que : $\forall x \in]0;1[$,

$$I(x)=\int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln t}dt \tag{1}$$

3. Vérifier que : $\forall x \in]0;1[$,

$$\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln t}dt=\ln 2 \tag{2}$$

4. Démontrer que pour tout élément x de $]0;1[$ et tout élément t de $]0;x[$: $0 \leq \frac{-1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}$

   En déduire que : $\forall x \in]0;1[$,

$$0 \leq \left|\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}dt\right| \leq \frac{-x}{\ln x} \tag{3}$$

5. Déduire des résultats précédents la limite de $I(x)$ quand x tend vers 0.
6. Etablir que pour tout élément x de $]0;1]$: $I-I(x)=\int_0^x f(t)dt$
7. Déterminer finalement la valeur de I.

Exercice 4

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul.
On dispose de deux jeux **identiques** de n cartes chacun, dont les dos sont indiscernables.
Chacun de ces jeux est composé de n figurines représentant des animaux différents.

Partie A

On choisit au hasard et simultanément une carte dans chaque jeu, formant ainsi une paire de cartes, mise de côté.
On recommence n fois ce tirage sans remise. On dispose alors de n paires de cartes.

1. Quelle est la probabilité que les n paires d'animaux soient reconstituées ?
2. Soit k un entier naturel de $\{0,\cdots,n-1\}$et k paires d'animaux fixées arbitrairement.
   Quelle est la probabilité qu'au moins ces k paires d'animaux soient reconstituées ?
3. Montrer grâce à la formule du crible que la probabilité p_n qu'aucune paire d'animaux ne soit reconstituée est égale à $p_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie B

On mélange maintenant les deux jeux dans une urne.
A chaque tour on tire une poignée de deux cartes. Si les animaux représentés sur ces deux cartes sont les mêmes, on ne remet pas les deux cartes dans l'urne, sinon on les remet dans l'urne.
Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de tours qui ont été nécessaires pour vider l'urne, en reconstituant ainsi les n paires de figurines d'animaux.

1. Déterminer la loi de la variable T_1.
2. Déterminer $T_n(\Omega)$ pour n supérieur ou égal à 2.
3.
   (a) En utilisant les événements C_i : "lors du i - ième tour, une paire d'animaux est reconstituée", montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :
$$P(T_2 = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \quad .$$
4.
   (a) Déterminer les probabilités $P(T_3 = 3)$, $\quad P(T_3 = 4)$.
   En utilisant le système complet d'événements $\left(C_1, \overline{C}_1\right)$, déterminer$P(T_3 = 5)$.
   (b) Montrer plus généralement que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour $k \geqslant n-1$:
$$P(T_n = k+1) = \frac{n}{\begin{pmatrix} 2n \\ 2 \end{pmatrix}} P(T_{n-1} = k) + \frac{\begin{pmatrix} 2n \\ 2 \end{pmatrix} - n}{\begin{pmatrix} 2n \\ 2 \end{pmatrix}} P(T_n = k).$$

Exercice 5
Partie I : un exemple

On considère, dans cette partie, les matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver, en fonction de I_3 et de A, deux matrices P_1 et P_2 de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$P_1 + P_2 = I_3 \quad \text{et} \quad 4P_1 + 9P_2 = A.$$
   Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2.
2. (a) Calculer les matrices P_1^2, P_1P_2, P_2P_1 et P_2^2.
   (b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$.
3. Trouver au moins une matrice B de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$. On pourra la chercher sous la forme d'une matrice triangulaire inférieure.

Dans toute la suite du problème,

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1 et f un endomorphisme de E.

On note e l'endomorphisme identité de E qui, à chaque élément de E, associe lui-même, et $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E qui, à chaque élément de E, associe l'élément nul de E.

On suppose qu'il existe un entier m de $\mathbb{N}^*$, des réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ deux à deux distincts et des endomorphismes $p_1, ..., p_m$ de E tous différents de $\tilde{0}$, tels que :

$$\forall k \in [\![0; m]\!],\ f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$$

Enfin on considère les polynômes :

$$N = \prod_{\ell=1}^{m} (X - \lambda_\ell) \text{ et pour tout } i \text{ de } [\![1; m]\!],\ M_i = \prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant m \\ \ell \neq i}} (X - \lambda_\ell) \text{ et } L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i.$$

On admet que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$: $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Partie II : Étude des puissances de f

4. Montrer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_m[X]$: $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$.
5. En déduire : $N(f) = \tilde{0}$.
6. (a) Montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1; m]\!]^2$, $L_i(\lambda_j)$ est égale à 1 si $i = j$ et égal à 0 si $i \neq j$.
   (b) En déduire, pour tout i de $[\![1; m]\!]$: $L_i(f) = p_i$.
7. (a) Montrer : $e = \sum_{i=1}^{m} p_i$.
   (b) En déduire que E est la somme des m sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(p_1), ..., \mathrm{Im}(p_m)$.
8. Soit i appartenant à $[\![1; m]\!]$.
   (a) Vérifier : $N = M_i(\lambda_i)(X - \lambda_i) L_i$.
   (b) En déduire, en utilisant le résultat de la question **6.** : $\mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\, e)$.
9. (a) Montrer, pour tout couple (i, j) de $[\![1; m]\!]^2$ tel que $i \neq j$: $p_i \circ p_j = \tilde{0}$.
   (b) En déduire, en utilisant le résultat de la question **7.a.**, pour i de $[\![1; m]\!]$: $p_i \circ p_i = p_i$.
   (c) Établir, pour tout i de $[\![1; m]\!]$: $p_i \circ f = \lambda_i p_i$.
10. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N},\ f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda^k p_i$, puis, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$: $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$.

Partie III : Intervention de produit scalaire

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$.
On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in E \times E$, par

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(y) \rangle.$$

11. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

On remarquera qu'ainsi E est muni de deux produits scalaires, $\langle ., . \rangle$ et φ.

12. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ.
13. Démontrer que, pour tout i de $[\![1; m]\!]$, p_i est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p_i)$ pour le produit scalaire φ.