Devoir Surveillé 09

Le mardi 7 Mai 2024
8h-12h

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1
Soit n un entier naturel non nul.

Partie I

On pose : $A = \big(X+1\big)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'on peut écrire : $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.
2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$, et les autres racines $z_1, z_2, \cdots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

   On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$.

3. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$

   En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.
4. Calculer, de deux façons : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis, en déduire Q_n et enfin P_n.
5. On pose $F = \dfrac{1}{A}$. Déterminer la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Partie II

On travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E supposé non réduit au vecteur nul.
$\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
Id_E désigne l'application identique de E et θ l'application nulle.
Par convention : $\forall\, f \in \mathcal{L}(E), \quad f^0 = \mathrm{Id}_E$.

On étudie, sur quelques cas particuliers, l'équation :

$$\big(f + \mathrm{Id}_E\big)^{2n} - \mathrm{Id}_E = \theta \quad \text{où} \quad f \in \mathcal{L}(E) \text{ est l'inconnue.}$$

6. Déterminer les homothétie vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée.
7. En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$, déterminer les sommes $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $S' = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$
8. Si s est une symétrie de E, exprimer $\big(s + \mathrm{Id}_E\big)^{2n} - \mathrm{Id}_E$ en fonction de s et Id_E.
   En déduire les symétries de E qui sont solutions de l'équation proposée.

Partie III

On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

I désigne la matrice identité et 0 la matrice nulle.

On pose $G = \left\{ M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \;—\; (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ où $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

9. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base. Vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

   On cherche à résoudre l'équation matricielle $(*)\ (M+I)^{2n} - I = 0$ avec M matrice inconnue dans G.

   On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

   Soit $M = M_{a,b}$ un élément de E tel que $b \neq 0$, u l'endomorphisme associé à M et Id_E l'application identique de E.

10. Déterminer une base (e'_1) de $E_1 = \mathrm{Ker}\,\big(u - (a+2b)\,\mathrm{Id}_E\big)$.
11. Déterminer une base (e'_2, e'_3) de $E_2 = \mathrm{Ker}\,\big(u - (a-b)\,\mathrm{Id}_E\big)$.
12. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E. On la note $\mathcal{B}'$.
13. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
14. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

    Écrire P et déterminer P^{-1} en précisant la méthode utilisée et en détaillant les calculs.
15. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.
16. Montrer que : M est solution de l'équation (*) si et seulement si D est solution de l'équation (*).
17. Déterminer toutes les matrices D solutions de l'équation (*).
18. En déduire toutes les solutions de l'équation (*) dans G.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$$

1. Prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Etudier sa parité.
2. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ admet une infinité de maximums relatifs [respectivement de minimums relatifs] en des points que l'on peut représenter par les termes d'une suite strictement croissante $\big(x_n\big)_{n\geqslant 1}$ [respectivement $\big(y_n\big)_{n\geqslant 1}$].

   On pose : $\forall\, n \geqslant 1 \quad a_n = f(x_n)$ et $b_n = f(y_n)$.

3. Montrer que les suites $\big(a_n\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(b_n\big)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

   En déduire que $f(x)$ admet une limite finie l quand x tend vers $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer cette limite).

Partie B

On se propose de déterminer une valeur approchée du nombre a_1 défini dans la partie **-A-**

1. Soit g la fonction définie sur $\big[0;\sqrt{\pi}\big]$ par $\forall\, t \in \big[0;\sqrt{\pi}\big] \quad g(t) = \sin(t^2)$

   Déterminer un majorant M_2 de $\left\{ \big|g''(t)\big| \quad t \in \big[0;\sqrt{\pi}\big] \right\}$

2. Soit k un entier strictement positif. On partage l'intervalle $\left[0;\sqrt{\pi}\right]$ en k intervalles de même longueur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{k}$ et l'on pose : $\quad \forall\, i \in \left\{0,1,\cdots,k\right\} \quad \alpha_i = \dfrac{i\sqrt{\pi}}{k}$.

   On a alors : $\quad \int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\,dt = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(t)\,dt$.

   On pose, pour tout i de $\left\{0,1,\cdots,k-1\right\}$, $\beta_i = \dfrac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2}$ et l'on se propose de prendre comme valeur approchée de $\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\,dt$ l'intégrale $I(k)$ telle que $I(k) = \int_0^{\sqrt{\pi}} \varphi(t)\,dt$, où φ est la fonction en escalier telle que :
   $$\begin{cases} \forall\, i \in \left\{0,1,\cdots,k-1\right\} \quad \forall\, t \in \left[\alpha_i;\alpha_{i+1}\right] \quad \varphi(t) = g(\beta_i) \\ \varphi\left(\sqrt{\pi}\right) = g\left(\sqrt{\pi}\right) \end{cases}$$

   (a) Exprimer $I(k)$ en fonction de k et des nombres β_i

   (b) Justifier, pour tout i de $\left\{0,1,\cdots,k-1\right\}$ l'égalité :
   $$\forall\, t \in \left[\alpha_i;\alpha_{i+1}\right] \quad g(t) = g(\beta_i) + \left(t-\beta_i\right) g'\left(\beta_i\right) + \int_{\beta_i}^{t}(t-u)g''(u)\,du$$

   (c) En déduire que l'on a : $\left|\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\,dt - I(k)\right| \leqslant \dfrac{M_2\,\pi\,\sqrt{\pi}}{24\,k^2}$

Exercice 3

Ce problème se compose de trois parties : il étudie des encadrements, deux suites de variables aléatoires discrètes et une simulation informatique. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite, admettre ce résultat.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

- On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
- On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.
  - Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
  - Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

  On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

• On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.

• On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.

On rappelle les notations possibles des probabilités conditionnelles :
$$P_B(A) = P(A/B)$$

Partie 1 : Etude de la variable aléatoire $\mathbf{X}_n$

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. (a) Quelle est la loi de I_n ?

   (b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $I_n = 1$?

   (c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :
   $$\forall j \in \mathbb{N}^{\times}, \forall k \in \{1, 2\ , ..., n\}\,, \quad P\left(X_n = j/I_n = k\right) = P\left(X_{k-1} = j-1\right)$$

2. (a) Quelle est la loi de X_1 ?

   (b) Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Donner la loi de X_2.

   (c) Calculer $P(X_3 = 2/I_3 = 1)$, $P(X_3 = 2/I_3 = 2)$, $P(X_3 = 2/I_3 = 3)$. Déterminer la loi de X_3.

3. (a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, ..., n\}$.

(b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$

(c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geqslant 2, \quad P\left(X_n = j\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P\left(X_k = j-1\right)$$

(d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer : $nP\left(X_n = j\right) - (n-1)P\left(X_{n-1} = j\right)$

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geqslant 1, P\left(X_n = j\right) = \frac{n-1}{n} P\left(X_{n-1} = j\right) + \frac{1}{n} P\left(X_{n-1} = j\right)$$

4. Soit $(T_i)_{i \geqslant 1}$une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i = T_1 + ... + T_n$$

(a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

(b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul :

$$P\left(S_n = j\right) = \frac{1}{n} P\left(S_{n-1} = j-1\right) + \frac{n-1}{n} P\left(S_{n-1} = j\right)$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

Partie 2 : Etude de la variable aléatoire $\mathbf{Y}_n$.

1. Donner la loi de Y_1.
2. Quelles sont les valeurs prises par Y_2 ? Déterminer la loi de Y_2.
3. (a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul et tout entier k supérieur ou égal à 2

$$P\left(Y_n = j / I_n = k\right) = P\left(Y_{k-1} = j-k\right)$$

(b) Si n est supérieur ou égal à 2, en déduire, pour tout entier j supérieur ou égal à 1

$$P\left(Y_n = j\right) = \frac{n-1}{n} P\left(Y_{n-1} = j\right) + \frac{1}{n} P\left(Y_{n-1} = j-n\right)$$

Partie 3. Simulation informatique.

Dans le langage informatique Python, la fonction *random.randint(1,n)* renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et n. On donne la fonction suivante :

```
Def Truc (n,a,b):
    alea = random.randint (1,n)
    a = a+1
    b = b+alea;
    print(alea,a,b)
    if alea > 1:
        Truc (alea-1,a,b)
```

1. Que fait ce programme si on appelle Truc(n,0,0) ? Que représentent a et b ?
2. Prouver la terminaison de ce programme.
3. Cet algorithme est récursif. Transformer ce programme en un programme itératif écrit en Python.