Devoir Surveillé 09 - Eléments de Correction

Exercice 1

Partie A

1. La fonction $t \mapsto \sin(t^2)$ étant continue sur $\mathbb{R}$ (elle est même de classe $\mathcal{C}^\infty$), elle est intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. $f : x \mapsto \int_0^x \sin(t^2)\,dt$ est donc définie, c'est la primitive de $x \mapsto \sin(t^2)$ qui s'annule en 0 (f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$).

   $x \mapsto \sin(x^2)$ étant paire, le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ $u = -t$ $(du = -dt)$ donne : $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt = \int_0^{-x} -\sin\left((-u)^2\right)\,du = -f(-x)$

   Conclusion $\boxed{f \text{ est définie dérivable sur } \mathbb{R} \text{ (de classe } \mathcal{C}^\infty) \text{ et impaire}}$

2. L'étude précédente montre que $f'(x) = \sin(x^2)$ dont le signe est bien connu :

   $$x^2 \geqslant 0 : \qquad \sin(x^2) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2k\pi \leqslant x^2 \leqslant (2k+1)\pi \qquad [k \in \mathbb{N}]$$
   $$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2k\pi} \leqslant x \leqslant \sqrt{(2k+1)\pi} \quad [\text{car } x \geqslant 0]$$

   Les extrémums sont obtenus quand la dérivée s'annule en changeant de signe.

   On peut conclure : $\boxed{f \text{ présente } \begin{cases} \text{un maximum en } x_n = \sqrt{(2n-1)\pi} & n \in \mathbb{N}^* \\ \text{un minimum en } y_n = \sqrt{2n\pi} & n \in \mathbb{N}^* \end{cases}}$

3. On pose $a_n = f(x_n)$ et $b_n = f(y_n)$.

   • Le sens de variation de $\left(a_n\right)_{n \geqslant 1}$ s'obtient en étudiant la différence

   $$a_{n+1} - a_n = f\left(x_{n+1}\right) - f\left(x_n\right) = \int_{\sqrt{(2n-1)\pi}}^{\sqrt{(2n+1)\pi}} \sin(t^2)\,dt$$

   Commençons par le changement de variable (de classe $\mathcal{C}^1$) $u = t^2$ $[du = 2t\,dt]$ qui donne $a_{n+1} - a_n = \int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du = \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du + \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du$

   Le changement de variable $u = v + \pi$ $[du = dv]$ appliqué à la deuxième intégrale permet de la ramener sur le même intervalle que la première

   $$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \frac{\sin(v+\pi)}{2\sqrt{v+\pi}}\,dv \\ &= \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \underbrace{\frac{\sin u}{2}}_{\leqslant 0} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right)}_{\geqslant 0} du \end{aligned}$$

   Sur l'intervalle $\left[(2n-1)\pi, 2n\pi\right]$ [avec $(2n-1)\pi \leqslant 2n\pi$], $\sin u \leqslant 0$

   et $\quad 0 < \sqrt{u} < \sqrt{u+\pi} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{u+\pi}} > 0$ montre que l'intégrale est négative ou nulle. Conclusion $\boxed{\text{la suite } \left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$

   • Un calcul très semblable montrerait que $\boxed{\text{la suite } \left(b_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

   • Enfin, la différence $a_n - b_n = f(x_n) - f(y_n) = \int_{\sqrt{(2n-1)\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} \sin(t^2)\,dt$ se majore facilement (les bornes sont dans l'ordre croissant) :

   $$\left|a_n - b_n\right| = \left|\int_{\sqrt{(2n-1)\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} \sin(t^2)\,dt\right| \leqslant \int_{\sqrt{(2n-1)\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} \left|\sin(t^2)\right|\,dt \leqslant \int_{\sqrt{(2n-1)\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} dt$$

   d'où $\quad 0 \leqslant \left|a_n - b_n\right| \leqslant \sqrt{2n\pi} - \sqrt{(2n-1)\pi} = \underbrace{\dfrac{\pi}{\sqrt{2n\pi} + \sqrt{(2n-1)\pi}}}_{\text{qui tend vers } 0}$

   Conclusion $\boxed{\text{nous avons } \lim_{n \to +\infty} \left(a_n - b_n\right) = 0}$

   Les deux suites sont adjacentes. Elles admettent une limite commune l quand $n \to +\infty$

   Les a_n et b_n sont des extremums de f.

   Plus précisément, les variations de f (ci-contre) et $a_n \geqslant a_{n+1}$ montrent que
   $x \in \left[x_n, x_{n+1}\right] \Rightarrow f(x) \in \left[b_n, a_n\right]$

t	x_n		y_n		x_{n+1}
$f(t)$	a_n	$\searrow$	b_n	$\nearrow$	a_{n+1}

   Comme les suites sont adjacentes, $\forall\ k \geqslant n \quad b_k \leqslant b_k \leqslant l \leqslant a_k \leqslant a_n$

   et comme $\left(x_n\right)$ est croissante et tend vers $+\infty$, il vient $\forall\ x, \quad x \geqslant x_n \Rightarrow b_n \leqslant f(x) \leqslant a_n$

   Enfin, $x_n = \sqrt{(2n-1)\pi} \Leftrightarrow n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_n^2}{\pi} + 1\right)$.

   En prenant $n = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{\pi} + 1\right)\right)$, quand x tend vers l'infini, n aussi et les suites adjacentes (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite. Le théorème des pincements prouve que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{x \to +\infty} f(x) = l}$

Partie B

1. Dérivons :

$g(t) = \sin(t^2)$
$g'(t) = 2\,t\,\cos(t^2)$
$g''(t) = 2\,\cos(t^2) - 4\,t^2\,\sin(t^2)$

On obtient un majorant (très large) $\left[0, \sqrt{\pi}\right]$: $\left|g''(t)\right| \leqslant 2\left|\cos(t^2)\right| + 4t^2\left|\sin(t^2)\right|$

d'où, sur l'intervalle $\left[0, \sqrt{\pi}\right]$ $\boxed{t \in \left[0, \sqrt{\pi}\right] \Rightarrow \left|g''(t)\right| \leqslant 2 + 4\pi}$

2. On a reconnu l'approximation par la méthode des "rectangles médians".
   (a) Le calcul de $I(k)$ donne immédiatement :

$$I(k) = \int_0^{\sqrt{\pi}} \varphi(t)\,dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g(\beta_i) \quad \text{donc} \quad \boxed{I(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \sin\left(\beta_i^2\right)}$$

   (b) Nous reconnaissons ici la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 1, appliquée à g entre β_i et t (ce qui ne pose aucun problème puisque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$) Conclusion $\boxed{g(t) = g(\beta_i) + (t-\beta_i)\,g'(\beta_i) + \int_{\beta_i}^t \frac{(t-u)^1}{1\,!}\,g''(u)\,du}$

   Note : ceci se retrouve facilement sans utiliser cette partie du cours : $g(t) - g(\beta_i) = \int_{\beta_i}^t g'(u)\,du$ que l'on intègre par parties $[\varphi(u) = u - t \quad \varphi'(u) = 1]$ $g(t) - g(\beta_i) = \left[(u-t)\,g'(u)\right]_{\beta_i}^t - \int_{\beta_i}^t (u-t)\,g''(u)\,du$ qui est le résultat attendu.

   (c) La majoration de $\Delta = \left|\int_0^{\sqrt{\pi}} g(t)\,dt - I(k)\right|$ est classique :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left|\sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \big(g(t) - g(\beta_i)\big)\,dt\right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \big(g(t) - g(\beta_i)\big)\,dt\right|}_{=\Delta_i} \end{aligned}$$

   Majorons chaque terme Δ_i :

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \left((t-\beta_i)\,g'(\beta_i) + \int_{\beta_i}^t (t-u)\,g''(u)\,du\right)\,dt\right| \\ &= \left|\left[\frac{g'(\beta_i)}{2}\,(t-\beta_i)^2\right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \int_{\beta_i}^t (t-u)\,g''(u)\,du\,dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \int_{\beta_i}^t (t-u)\,g''(u)\,du\,dt\right| \\ &\leqslant \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \left|\int_{\beta_i}^t (t-u)\,g''(u)\,du\right|\,dt \end{aligned}$$

   Comme, pour $\beta_i \leqslant t$:
   $\left|\int_{\beta_i}^t (t-u)\,g''(u)\,du\right| \leqslant \int_{\beta_i}^t |t-u|\,\left|g''(u)\right|\,du \leqslant M_2\int_{\beta_i}^t (t-u)\,du = M_2\,\dfrac{(t-\beta_i)^2}{2}$

   et pour $t \leqslant \beta_i$:
   $\left|\int_{\beta_i}^t (t-u)\,g''(u)\,du\right| \leqslant \int_t^{\beta_i} |t-u|\,\left|g''(u)\right|\,du \leqslant M_2\int_t^{\beta_i} (u-t)\,du = M_2\,\dfrac{(t-\beta_i)^2}{2}$

   il vient : $\Delta_i \leqslant \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \dfrac{M_2}{2}\,(t-\beta_i)^2\,dt = \dfrac{M_2}{6}\,\left[(t-\beta_i)^3\right]_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} = \dfrac{M_2\,\pi\sqrt{\pi}}{24\,k^3}$

   Ainsi, en revenant à la somme initiale :

$$\Delta \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \Delta_i \leqslant \frac{M_2\,\pi\sqrt{\pi}}{24\,k^2} \quad \boxed{\left|\sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \big(g(t) - g(\beta_i)\big)\,dt\right| \leqslant \frac{M_2\,\pi\sqrt{\pi}}{24\,k^2}}$$

Exercice 2

Partie 1 : Etude de la variable aléatoire $\mathbf{X}_n$

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. (a) I_n est le numéro de la première boule tirée. Comme elles sont toutes équiprobables, I_n suit une loi uniforme sur $[[1, n]]$. Pour tout $k \in [[1, n]]$, $p\,(I_n = k) = 1/n$
   (b) Quand $I_n = 1$, on obtient la boule 1 au premier tirage, donc $X_n = 1$; et la loi conditionnelle de X_n est : $p\,(X_n = 1/I_n = 1) = 1$
   (c) Quand $I_n = k \geq 2$, on obtient k au premier tirage et on retire toutes les boules de numéros supérieur à k.

   On continue donc à partir du 2° tirage avec $k - 1 \geq 1$ boules.

   Pour obtenir 1 au $j^{ème}$ tirage, il reste donc $j - 1$ tirages à affectuer (à partir du 2°) vec $k - 1$ boules.

   Donc

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{2\ , ..., n\}\,, \quad P\,(X_n = j/I_n = k) = P\,(X_{k-1} = j - 1)$$

2. (a) Pour la loi de X_1, on n'a qu'une seule boule : la numéro 1.

   Donc on l'obtient dès le premier tirage, et la loi deX_1 est : $X_1\,(\Omega) = \{1\}$ et $p\,(X_1 = 1) = 1$
   (b) Pour X_2 on dispose au départ des boules 1 et 2. $(X_2 = 1)$ est l'événement "obtenir 1 au premier tirage".

   Donc $(X_2 = 1) = (I_2 = 1)$ et $p\,(X_2 = 1) = 1/2$

   Si on n'a pas 1 au premier tirage, on aura 2 et il ne restera que la 1 dans l'urne. On obtiendra alors 1 au second tirage.

   Donc $p\,(X_2 = 2) = p\,(I_2 = 2) = 1/2$ et finalement :

k	1	2	
$p(X_2=k)$	1/2	1/2	
$kp(X_2=k)$	1/2	1	$3/2=E(X_2)$
$k^2p(X_2=k)$	1/2	2	$5/2=E(X_2^2)$

d'où $V(X_2)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{9}{4}=\dfrac{1}{4}$

(c) Quand $I_3=1$, on a la boule 1 dès le premier tirage et donc $X_3=1$. Donc $P(X_3=2/I_3=1)=0$

Quand $I_3=2$ on a la boule 2 au premier tirage, donc pour le second il ne reste dans l'urne que la boule 1 ; on est donc sûr de l'obtenir au second. Donc $P(X_3=2/I_3=2)=1$.

Quand $I_3=3$, il reste les boules 1 et 2 dans l'urne pour le second tirage. La probabilité d'obtenir 1 au second tirage est donc 1/2 et $P(X_3=2/I_3=3)=1/2$

On utilise alors la formule des probabilités totales : $I_3=1$, 2 ou 3 est un système complet d'événeùments donc

$$\begin{aligned} p(X_3=2) &= p(X_3=2/I_3=1)\,p(I_3=1)+p(X_3=2/I_3=2)\,p(I_3=2)\\ &\quad +p(X_3=2/I_3=3)\,p(I_3=3)\\ &= 0+1\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

On sait déjà que $p(X_3=1)=1/3$ donc (loi d'une variable aléatoire) $p(X_3=3)=1-p(X_3=1)-p(X_3=2)=1/6$

(on pouvait aussi décomposer $X_3=3$: on doit avoir 1 au $3^{ème}$ et 3 au premier sinon on ne fait que 2 tirages donc 2 au 2°)

k	1	2	3	
$p(X_3=k)$	1/3	1/2	1/6	1
$kp(X_3=k)$	1/3	1	1/2	$11/6=E(X_3)$
$k^2p(X_3=k)$	1/3	2	3/2	$23/6=E(X_3^2)$

d'où $V(X_3)=\dfrac{23}{6}-\dfrac{121}{36}=\dfrac{17}{36}$

3. (a) " X_n prend ses valeurs dans $\{1,2,...,n\}$" peut être compris comme "ce sont toutes les valeurs de X_n " ou bien comme "X_n prend des valeurs parmi celles là" (plutôt cette deuxième forme)

Comme on retire au moins une boule à chaque tirage, on en fait au maximum n et au amaximum, $X_n=n$

Et au minimum, on aobtient la boule 1 au premier. Donc X_n prend ses valeurs dans $\{1,2,...,n\}$

(b) Comme $(X_n=1)=(I_n=1)$ on a $P(X_n=1)=1/n$

$(X_n=n)$ ne peut survenir que si l'on retire une seule boule à chaque tirage. Donc si pour tout k, on tire au $k^{ième}$ tirage la plus grande des boules restantes. Donc $(X_n=k)=n_1\cap(n-1)_2\cap\cdots\cap 1_n$ en codant i_j l'événement "obtenir i au $j^{ème}$ tirage"

On a donc $p(X_n=k)=p(n_1)\,p(n-1_2/n_1)\dots p(1_n/n_1\cap\cdots\cap 2_{n-1})$

le conditinnement donne les boules restantes dans l'urne (qui sont équiprobables) :

$p(X_n=n) = p(n_1)\,p(n-1_2/n-1 \text{ boules})\dots p(1_n/1\text{ boule}) = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n-1}\cdots\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{n!}$

(c) On connait déjà $p(X_n=1)$ donc on ne s'intéresse à $p(X_n=j)$ que pour $j\geq 2$.

Pour avoir $X_n=j$, on réutilise $P(X_n=j/I_n=k)=P(X_{k-1}=j-1)$ via la formule des probabiités totales :

$(I_n=k)_{k\in[[1,n]]}$ est un système complet d'événements. Donc

$$\begin{aligned} p(X_n=j) &= \sum_{k=1}^{n}p(X_n=j/I_n=k)\,p(I_n=k)\\ &= \sum_{k=2}^{n}p(X_n=j/I_n=k)\,p(I_n=k)+p(X_n=j/I_n=1)\,p(I_n=1)\end{aligned}$$

Si $I_n=1$ alors $X_n=1$, et comme $j\geq 2$ on a $p(X_n=j/I_n=1)=0$.

N.B. si $k<j$ et que $I_n=k$ il reste $k-1$ boules après le premier tirage donc on les aura épuisées en $k-1$ tirages au plus tard (donc au $k^{ième}$). On ne peut donc pas avoir $X_n=j$ et $p(X_n=j/I_n=k)=0$.

On aurait donc pu extraire de la somme tous les termes de 1 à $j-1$.

$$\begin{aligned} p(X_n=j) &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}p(X_{k-1}=j-1)\\ \text{réindexé } h=k-1: &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}p(X_k=j-1)\end{aligned}$$

Donc

$$\forall j\geqslant 2,\quad P(X_n=j)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}P(X_k=j-1)$$

(d) Si n est supérieur ou égal à 3 (donc $n-1$ est supérieur à 2 et on peut réutiliser le précédent) et j supérieur ou égal à 2, on a :

$$\begin{aligned} nP(X_n=j)-(n-1)P(X_{n-1}=j) &= \frac{n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}P(X_k=j-1)-\sum_{k=1}^{n-2}P(X_k=j-1)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}P(X_k=j-1)-\sum_{k=1}^{n-2}P(X_k=j-1)\\ &= p(X_{n-1}=j-1)\end{aligned}$$

Donc pour $n\geq 3$ et $j\geq 2$ on a

$$\begin{aligned} nP(X_n=j) &= (n-1)P(X_{n-1}=j)+p(X_{n-1}=j-1) \text{ donc}\\ P(X_n=j) &= \frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=j)+\frac{1}{n}P(X_{n-1}=j-1)\end{aligned}$$

Pour $j=1$ on a pour tout entier $n\geq 1$: $P(X_n=1)=\dfrac{1}{n}$ donc

$$\frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=1)+\frac{1}{n}P(X_{n-1}=0)=\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}0=\frac{1}{n}=P(X_n=1)$$

et la propriété est encore vraie pour $j=1$

Enfin pour $n=2$, le seul cas non prouvé est $j=2$ ($j=1$ est déjà traité et $j\geq 3$ donne des probabilité nulles)

$$\frac{2-1}{2}P(X_1=2)+\frac{1}{2}P(X_1=1)=0+\frac{1}{2}=p(X_2=2)$$

Donc si $n\geq 2$

$$\forall j\geqslant 1\ ,\ P(X_n=j)=\frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=j)+\frac{1}{n}P(X_{n-1}=j-1)$$

4. Soit $(T_i)_{i\geqslant 1}$une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{i}$. On pose :

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}T_i=T_1+.....+T_n$$

5. T_1 suit une loi de bernouilli de paramètre 1 donc $p(T_1=1)=1=p(X_1=1)$ et $p(T_1=0)=0=p(X_1=0)$

   Donc X_1 et T_1 ont même loi.

6. On a pour tout entier j (même si $j=0$ auquel cas tous les événements sont impossibles) $(S_n=j)=\left(\sum_{i=1}^{n}T_i=j\right)$et comme les valueurs possibles de T_n ne sont que 0 et 1,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}T_i=j\right) &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}T_i=j\right)\cap(T_n=0)\right]\cup\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}T_i=j-1\right)\cap(T_n=1)\right]\\ &= [(S_{n-1}=j)\cap(T_n=0)]\cup[(S_{n-1}=j-1)\cap(T_n=1)]\end{aligned}$$

Les deux étant incompqatibles et S_{n-1} (qui ne dépend que de $T_1\ldots,T_{n-1}$) étant indépendant de T_n

$$\begin{aligned} P(S_n=j) &= p[(S_{n-1}=j)\cap(T_n=0)]+p[(S_{n-1}=j-1)\cap(T_n=1)]\\ &= P(S_{n-1}=j-1)\,p(T_n=0)+P(S_{n-1}=j-1)\,p(T_n=1)\\ &= \frac{n-1}{n}P(S_{n-1}=j)+\frac{1}{n}P(S_{n-1}=j-1)\end{aligned}$$

C.Q.F.D

On a alors par récurrence sur n que pour tout entier j, (et on devra traiter à part le cas $j=1$ qui fait intervenir $S_{n-1}=0$ si on n'a pas inclus la valeur 0 au dessus) que $p(S_n=j)=p(X_n=j)$ donc que X_n et S_n ont même loi.

Partie 2 : Etude de la variable aléatoire $\mathbf{Y}_n$.

1. Pour Y_1, comme la seule boule dans l'urne est 0, Y_1 et la variable certaine égale à 1.
2. (a) Pour Y_2 on a dans l'urne les boules 1 et 2. Les sommes possibles sont donc : 1 (1 tiré en premier) et 2+1 (2 tiré en premié puis 1)

   Donc $Y_2(\Omega)=\{1,3\}$

   (b) Comme $(Y_2=1)=1_1$ (ontire 1 en premier) on a $P(Y_1=1)=1/2$

   et $p(Y_2=3)=p(2_1\cap 1_2)=p(2_1)\,p(1_1/2_1)=1/2\cdot 1=1/2$

   (a) Si on tire la boule k en premier, il reste les boules jusqu'à $k-1$.

   Donc pour faire un total de j, il reste à faire un total de $j-k$ avec les $k-1$ boules restantes.

   Donc si n est supérieur ou égal à 2, pour tout entier j non nul et tout entier k supérieur ou égal à 2

$$P(Y_n=j/I_n=k)=P(Y_{k-1}=j-k)$$

On a besoin de $k \geq 2$ pour que la variable Y_{k-1} soit bien définie.

(si $j < k$, on ne pourra pas obtenir un total plus petit que le premier tirage, ce que l'on retrouve bien dans cette formule où toutes les probailités seront nulles)

(b) On a alors par la formule des probabilités totales :

$(I_n = k)_{k \in [[1,n]]}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} P(Y_n = j) &= \sum_{k=1}^{n} p(Y_n = j / I_n = k)\, p(I_n = k) \\ &= \sum_{k=2}^{n} p(Y_n = j / I_n = k)\, p(I_n = k) + p(Y_n = j / I_n = 1)\, p(I_n = 1) \end{aligned}$$

on doit traiter à part le cas où $k = 1$ et la probabilité sera nulle pour $j > 1$

— Pour $j = 1$ on a $P(Y_n = 1) = \dfrac{1}{n}$ (il faut obtenir 1 dès le premier tirage)

$\dfrac{n-1}{n} P(Y_{n-1} = 1) + \dfrac{1}{n} P(Y_{n-1} = 1 - n) = \dfrac{n-1}{n} \dfrac{1}{n-1} + 0 = \dfrac{1}{n}$ donc la formule est vraie pour $j = 1$

— On traite à présent uniquement pour $j > 1$: on a

$$P(Y_n = j) = \sum_{k=2}^{n} P(Y_{k-1} = j - k)\, \frac{1}{n}$$

Comme n n'intervient plus que comme borne supérieure de la somme et dans le $1/n$, on a donc

$$P(Y_{n-1} = j) = \sum_{k=2}^{n-1} P(Y_{k-1} = j - k)\, \frac{1}{n-1}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(Y_{n-1} = j - n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-1} P(Y_{k-1} = j - k) + \frac{1}{n} P(Y_{n-} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} P(Y_{k-1} = j - k)\, \frac{1}{n} \\ &= P(Y_n = j) \end{aligned}$$

Partie 3. Simulation informatique.

1. Dans la fonction Truc, récursive, a et b sont des accumulateurs qui calculent X_n et Y_n et alea représente la boule tirée au hasard.

   En effet :
   - on tire un nombre (boule) au hasard entre 1 et n
   - on compte un tirage de plus : a = a+l
   - on accumule le numéro : b = b + alea
   - on affiche le numéro obtenu, le nombre de tirages et la somme des tirages
   - puis on recommence avec les boules restantes (numéros $\leq alea - 1$) : Truc (alea- l , a , b)
   - Il s'arrète quand le numéro 1 est obtenu
2. Le programme termine car la suite des valeurs successives de alea est une suite d'entiers naturels strictement décroissante.
3. Avec un programme itératif :

```
def progiter(n):
    a,b =0, 0
    while n!=1:
        n = random.randint(1,n-1)
        print(n)
        a = a+1
        b = b+n
    return a,b
```