Devoir Surveillé 09 - Eléments de Correction

Exercice 1

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\varphi(P))(x) = \displaystyle\int_0^1 P(x+t)dt$

1. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P et Q deux éléments de E.

$\varphi(\alpha P + Q)(x) = \displaystyle\int_0^1 (\alpha P + Q)(x+t)dt = \int_0^1 (\alpha P(x+t) + Q(x+t))dt = \alpha \int_0^1 P(x+t)dt + \int_0^1 Q(x+t)dt$

On a donc bien , $\varphi(\alpha P + Q) = \alpha\varphi(P) + \varphi(Q)$ et $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

(b) $\varphi(e_0)(x) = \displaystyle\int_0^1 e_0(x+t)dt = \int_0^1 1dt = 1$

$\varphi(e_1)(x) = \displaystyle\int_0^1 e_1(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)dt = \int_0^1 xdt + \int_0^1 tdt = \Big[x.t\Big]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = x + \frac{1}{2}$

$\varphi(e_2)(x) = \displaystyle\int_0^1 e_2(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)^2dt = \int_0^1 x^2 + 2xt + t^2dt = \left[x^2.t + x.t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = x^2 + x + \frac{1}{3}$

Par conséquent : $\boxed{\varphi(e_0) = e_0,\ \varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1 \text{ et } \varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2\ .}$

(c) Montrons que φ est à valeurs dans E. Soit $P = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$ un polynÃ´me de E.
La linéarité de φ montre que $\varphi(P) = \alpha\varphi(e_0) + \beta\varphi(e_1) + \gamma\varphi(e_2)$.
Or ,comme on l'a vu au (b) :$\varphi(e_0) = e_0 \in E$, $\varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1 \in E$ et $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2 \in E$ et E est stable par combinaison linéaire , donc $\boxed{\varphi(P) \in E.}$

φ est linéaire et à valeurs dans E, donc <u>φ est un endomorphisme de E.</u>

2. (a) D'après les résultats du 1.(b), la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est triangulaire avec 3 pivots non nuls , elle est donc inversible et φ est bijectif . <u>φ est un automorphisme de E.</u> (endomorphisme bijectif de E).

3. Les commandes `Scilab` suivantes affichent la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrer une valeur pour n:')
A=[1,1/2,1/3;0,1,1;0,0,1]
disp(A^n)
```

4. (a) Démontrons la propriété $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par récurrence :

- <u>initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = 0$.

  Un peu de rab : Pour $n = 1$, on a bien $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_1 = \frac{1}{3}$.

- <u>hérédité :</u> En supposant $P(n)$ vraie, calculons $A^{n+1} = A.A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  On obtient alors , $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  avec $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.

- <u>conclusion :</u> Pour tout entier naturel n , il existe un réel u_n tel que $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$,

  avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.

(b) Puisque $u_0 = 0$,on a $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_1 - u_0) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_{k+1} - u_k)$.

Or $(u_{k+1} - u_k) = \dfrac{1}{6}(3k+2)$,

donc $u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \dfrac{1}{6}(3k+2) = \dfrac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=n-1}(3k) + \dfrac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=n-1} 2 = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n-1} k + \dfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{k=n-1} 1$.

Et pour finir : $u_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{(n-1)n}{2} + \dfrac{n}{3} = n\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{n-1}{4}\right) = \dfrac{n(3n+1)}{12}$.

(c) Pour tout entier naturel n : $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & \dfrac{n(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\operatorname{ch} x)}$$

1. La fonction f est définie pour tout réel x tel que $\operatorname{ch} x > 0$ et $x \neq 0$.

   $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x \geq 1 > 0$ donc le domaine de définition D de f est $\boxed{D = \mathbb{R}^*}$.

2. (a) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch} x - 1 = 0$ alors en écrivant $\ln \operatorname{ch} x = \ln(1 + \operatorname{ch} x - 1)$ on peut utiliser le théorème de composition de développement limité en utilisant $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$ où on remplace X par la partie régulière du développement limité de $\operatorname{ch} x - 1$:

   ainsi $\ln(\operatorname{ch} x) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ d'où $\frac{1}{x}\ln \operatorname{ch} x = \frac{x}{2} + o(x^2)$

   il vient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln \operatorname{ch} x = 0$

   on peut donc à nouveau utiliser le théorème de composition de développement limité en remplaçant X par la partie régulière du développement limité de $\frac{1}{x}\ln \operatorname{ch} x$ dans celui de e^X

   $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$ donc $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)$

   Conclusion : $\boxed{f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}$

   (c) On en déduit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 par une fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}}$.

   On appellera ensuite encore f le prolongement ainsi obtenu.

   (d) La tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}$ a pour équation : $\boxed{y = 1 + \frac{1}{2}x}$

   Au voisinage de 0, $\frac{1}{8}x^2 > 0$ donc $\underline{\mathcal{C} \text{ est au -dessus de } \mathcal{T}_0 \text{ au voisinage de } 0}$.

3. $\ln \operatorname{ch} x = \ln \frac{e^x(1+e^{-2x})}{2} = x + \ln \frac{1+e^{-2x}}{2}$ donc $\frac{1}{x}\ln \operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{x}\ln \frac{1+e^{-2x}}{2}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln \dfrac{1+e^{-2x}}{2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln \operatorname{ch} x = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} e^X = e$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e}$

   $\ln \operatorname{ch} x = \ln \frac{e^{-x}(1+e^{2x})}{2} = -x + \ln \frac{1+e^{2x}}{2}$ donc $\frac{1}{x}\ln \operatorname{ch} x = -1 + \frac{1}{x}\ln \frac{1+e^{2x}}{2}$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\ln \dfrac{1+e^{2x}}{2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\ln \operatorname{ch} x = -1$ et $\lim\limits_{X\to -1} e^X = \dfrac{1}{e}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{e}}$

4. (a) La fonction $x \mapsto \ln \operatorname{ch} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur D en tant que logarithme d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

   La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}\ln \operatorname{ch} x$ est dérivable sur D en tant que produit de fonctions dérivables sur D.

   ALors f est dérivable sur D en tant qu'exponentielle d'une fonction dérivable sur D.

   $\forall x \in D, f'(x) = f(x)\frac{x\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \ln \operatorname{ch} x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}(x \tanh x - \ln \operatorname{ch} x)$

   donc pour tout réel x appartenant à D, $\boxed{f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}\varphi(x)}$ où φ est la fonction définie par

$\varphi(x) = x\tanh x - \ln \operatorname{ch} x$.

(b) φ est dérivable sur D et $\forall x \in D, \varphi'(x) = \tanh x + x(1-\tanh^2 x) - \tanh x = x(1-\tanh^2 x)$

or $\forall x \in D, -1 < \tanh x < 1$ donc $1 - \tanh x > 0$ ainsi $\varphi'(x)$ est du signe de x.

On en déduit que φ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$ d'où : $\boxed{\forall x \in D, \varphi(x) > 0}$

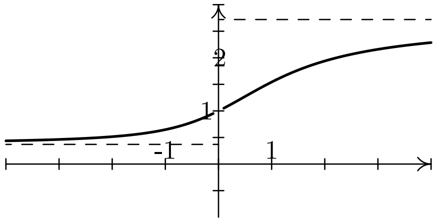
(c) $\forall x \in D, \frac{f(x)}{x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$ qui est strictement positif.

f est donc strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ $]0;+\infty[$.

D'après le développement limité , la fonction f prolongée par continuité est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

(d)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e



Exercice 3
Partie -A

En dimension 3

1. Dans la base (i,j,k), l'expression analytique de φ est $\begin{cases} x' = & 2x - y - z \\ y' = & -x + 2y - z \\ z' = & -x - y + 2z \end{cases}$.

Le vecteur de coordonnées (x,y,z) appartient au noyau si et seulement si :

$\begin{cases} 0 = & 2x - y - z \\ 0 = & -x + 2y - z \\ 0 = & -x - y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = y = z$ $\boxed{\text{Ker}\,(\varphi) \text{ est la droite de base } i+j+k}$

Le noyau étant de dimension 1, le théorème du rang montre que $\dim(\text{Im}\ \varphi) = 2$.

Nous savons que Im φ est engendré par l'image d'une base de E, (par exemple les trois vecteurs colonne de la matrice A). Comme les deux premiers vecteurs forment une famille libre, nous en avons une base. $\boxed{\text{Im}\ \varphi \text{ est le plan de base } (2i - j - k\,,\ -i + 2j - k)}$

Une représentation paramétrique de Im φ est donc :

$$\left\{\begin{array}{rrr|r|r} x = & 2\alpha & -\beta & 1 & \\ y = & -\alpha & +2\beta & & 1 \\ z = & -\alpha & -\beta & -1 & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x - z & = \quad 3\alpha \\ y - z & = \quad 3\beta \\ \quad z & = \quad -\alpha - \beta \end{cases}$$

d'où l'équation : $3z = -(x-z) - (y-z)$ $\boxed{\text{Im}\ \varphi \text{ est le plan d'équation } x + y + z = 0}$

Im φ est un hyperplan de E. Comme le vecteur de base de Ker φ n'appartient pas à Im φ (ses coordonnées $(1,1,1)$ ne vérifie pas l'équation $x+y+z=0$) $\boxed{E = \text{Im}\ \varphi \oplus \text{Ker}\ \varphi}$

2. Les vecteurs de Im φ sont les vecteurs de coordonnées $(x,y,-x-y)$. L'expression analytique du **-A-1** en donne l'image $\begin{cases} x' = & 2x - y - (-x-y) & = & 3x \\ y' = & -x + 2y - (-x-y) & = & 3y \\ z' = & -x - y + 2(-x-y) & = & -3x - 3y \end{cases}$

$\boxed{\text{la restriction de } \varphi \text{ à Im } \varphi \text{ est l'homothétie vectorielle de rapport 3}}$

Tout vecteur u de E se décompose en $u = v + k,\ v \in \text{Im}\ \varphi, k \in \text{Ker}\ \varphi$.
Soit p la projection vectorielle sur Im φ de direction Ker φ.
La restriction de φ à Im φ étant une homothétie h de rapport 3, nous avons $\varphi(u) = \varphi(v+k) = \varphi(v) = 3v = \underbrace{3p(u)}_{=h\circ p(u)} = \underbrace{p(3u)}_{=p\circ h(u)}$ soit

$\boxed{\varphi = 3p = h \circ p = p \circ h}$

3. Travaillons dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ sachant que $\varphi = 3p$:

$$f_\lambda \circ f_{\lambda'} = (3\lambda p) \circ (3\lambda' p) = 9\lambda\lambda' \underbrace{p \circ p}_{=p} = 3\lambda\lambda'(3p) = 3\lambda\lambda'\varphi = f_{3\lambda\lambda'}$$

De plus : $\quad \lambda \neq 0, \lambda' \neq 0 \Rightarrow 3\lambda\lambda' \neq 0$ $\boxed{f_\lambda \circ f_{\lambda'} = f_{3\lambda\lambda'} \in \mathcal{F}}$

Ceci montre que $\circ$ est une loi de composition interne dans $\mathcal{F} = \{f_\lambda \;—\; \lambda \in \mathbb{R}^*\}$

De plus :

— $\circ$ est une loi associative

— $f_\lambda \circ f_{\lambda'} = f_{3\lambda\lambda'} = f_{3\lambda'\lambda} = f_{\lambda'} \circ f_\lambda \quad \Rightarrow \quad \circ$ est commutative

— $f_\lambda \circ f_{\frac{1}{3}} = f_{3\lambda\frac{1}{3}} = f_\lambda \quad \Rightarrow \quad f_{\frac{1}{3}}$ est élément neutre

— $\forall\, \lambda \neq 0,\ f_\lambda \circ f_{\frac{1}{9\lambda}} = f_{\lambda \frac{1}{9\lambda}} = f_{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f_\lambda$ admet un symétrique dans $\mathcal{F}$

$\boxed{(\mathcal{F}, \circ) \text{ est un groupe abélien}}$

Le neutre est $f_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(3p) = p$ donc $\boxed{\text{le neutre n'est pas un automorphisme}}$

Le calcul précédent montre que $f_\lambda^2 = 9\lambda^2 p = 3\lambda(3\lambda p)$ soit $\boxed{f_\lambda^2 = 3\lambda f_\lambda}$

Partie -B-

En dimension quelconque

1. Dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$, si h est une homothétie vectorielle de rapport a, alors $h = a\ \mathrm{Id}$.
   Si p est un projecteur de E, alors $p \circ h = h \circ p = a\,p$.
   Il vient donc : $f^2 = (ap) \circ (ap) = a^2 p^2 = a^2 p = af$. $\boxed{f = h \circ p \text{ vérifie } f^2 = af}$

2. Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = af$, en posant $g = \frac{1}{\lambda} f$, $\lambda \neq 0$, ceci devient $\lambda^2 g^2 = a\lambda g$. En choisissant $\lambda^2 = a\lambda$, soit $\lambda = a$ (ce qui est possible puisque $a \neq 0$), il vient $g^2 = g$. L'application linéaire g est donc une projection.
   $\boxed{f \in \mathcal{L}(E) \text{ vérifie } f^2 = af \Leftrightarrow f = \tfrac{1}{a} g \text{ où } g = af \text{ est un projecteur}}$

Exercice 4

1. (a) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^{2n}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Ceci prouve que $\boxed{\varphi_n \text{ est définie sur }]0,1]}$

   D'autre part, f est positive donc
   $$0 < x < x' \leqslant 1 \Rightarrow x < x' \leqslant 1 \leqslant \frac{1}{x'} < \frac{1}{x} \Rightarrow \int_{x'}^{1/x'} f \leqslant \int_x^{1/x} f$$
   (les bornes sont dans l'ordre usuel). Ceci prouve que
   $\boxed{\varphi_n \text{ est décroissante sur }]0,1]}$

   (b) Étant continue, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Si F est une de ces primitives, nous avons $\varphi_n(x) = [F(t)]_x^{1/x} = F(\frac{1}{x}) - F(x)$. Ceci prouve que φ_n est dérivable (somme et composée de fonctions dérivables), avec
   $$\varphi'_n(x) = -\frac{1}{x^2} F'(\frac{1}{x}) - F'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{x^{2n}}{x^{2n}+1} - \frac{1}{x^{2n}+1}$$
   $\boxed{\varphi_n \text{ est dérivable et } \varphi'_n(x) = -\frac{x^{2n-2}+1}{x^{2n}+1}}$

   φ'_n étant négative, ceci confirme que φ_n est décroissante.

2. *Présentons deux méthodes différentes :*

   méthode par les dérivées : pour les mêmes raisons que **1-b** :

   — $\psi(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^2n}\, dt = G(1) - G(x)$ où $G'(t) = \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}$
   montre que $\psi'(x) = -G'(x) = -\frac{1+x^{2n-2}}{1+x^2n} = \varphi'_n(x)$

   — $\rho(x) = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\, dt = \frac{1}{2}\left(G(\frac{1}{x}) - G(x)\right)$ qui montre que
   $$\rho'(x) = \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{x^2} G'(\tfrac{1}{x}) - G'(x)\right) = -\frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{x^2} \tfrac{(x^{2n-2}+1)\,x^{2n}}{x^{2n-2}\,(x^{2n}+1)} + \tfrac{1+x^{2n-2}}{1+x^{2n}}\right) = \varphi'_n(x)$$

   — Sur l'intervalle $]0,1]$, φ_n, ψ et ρ ont des dérivées égales et vérifient
   $\varphi_n(1) = \psi(1) = \rho(1) = 0$: elles sont égales.

   $\boxed{\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\, dt = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\, dt}$

   méthode par changement de variable : (la classe des fonctions le permet)

   écrivons $\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^{2n}} + \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^{2n}}$, et effectuons, dans la deuxième intégrale, le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $t = \frac{1}{u}$, $dt = -\frac{1}{u^2}\, du$:
   $$\int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^{2n}} = \int_1^x \frac{-\frac{1}{u^2}\, du}{1+(\frac{1}{u})^{2n}} = \int_x^1 \frac{u^{2n-2}\, du}{u^{2n}+1}$$
   Par linéarité : $\boxed{\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\, dt}$

   Le même changement sur l'intervalle $\left[x, \frac{1}{x}\right]$ donne $\varphi_n(x) = \int_x^{1/x} \frac{t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\, dt$ d'où
   $$2\,\varphi_n(x) = \int_x^{1/x} \frac{1}{1+t^{2n}}\, dt + \int_x^{1/x} \frac{t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\, dt$$
   Toujours par linéarité : $\boxed{\varphi_n(x) = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\, dt}$

3. (a) La fraction $\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \frac{N(t)}{D(t)}$ est de degré négatif (représentant irréductible). Ses pôles sont les racines d'ordre $2n$ de -1 : $\alpha_k = e^{i\,(1+2k)\pi/2n} = e^{i\,\omega_k}$, $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$.

   Les pôles sont simples donc
   $$\frac{N(t)}{D(t)} = \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\beta_k}{t-\alpha_k}, \qquad \text{où} \qquad \beta_k = \frac{N(\alpha_k)}{D'(\alpha_k)} = \frac{1+\alpha_k^{2n-2}}{2\,n\,\alpha_k^{2n-1}}$$
   En remarquant que $\alpha_k^{2n-1} = \frac{\alpha_k^{2n}}{\alpha_k} = -\frac{1}{\alpha_k}$, *et* $\alpha_k^{2n-2} = -\frac{1}{\alpha_k^2}$, il vient
   $$\beta_k = \frac{1 - \frac{1}{\alpha_k^2}}{-2\,n\,\frac{1}{\alpha_k}} = \frac{1}{2n}\left(\tfrac{1}{\alpha_k} - \alpha_k\right) = \frac{1}{2n}\left(\overline{\alpha_k} - \alpha_k\right) = -\frac{i}{n} \sin \omega_k$$
   $\boxed{\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{-\frac{i}{n} \sin \omega_k}{t - e^{i\,\omega_k}}}$

(b) En regroupant les conjugués ($\alpha_k = \overline{\alpha_{2n-1-k}}$), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} &= -\frac{i}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\sin\omega_k}{t-\alpha_k}+\frac{\sin\omega_{2n-1-k}}{t-\overline{\alpha_k}}\right)\\ &= -\frac{i}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\sin\omega_k}{t-\alpha_k}-\frac{\sin\omega_k}{t-\overline{\alpha_k}}\right)\\ &= -\frac{i}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\omega_k\ \frac{\alpha_k-\overline{\alpha_k}}{t^2-(\alpha_k+\overline{\alpha_k})\,t+\alpha_k\,\overline{\alpha_k}}\end{aligned}$$

Finalement, on obtient $\boxed{\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2\cos\omega_k\,t+1}}$

(c) Le calcul d'une primitive est classique :

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2t\cos\omega_k+1}\,dt &= \int\frac{\sin^2\omega_k}{(t-\cos\omega_k)^2+\sin^2\omega_k}\,dt\\ &= \int\frac{1}{\left(\frac{t-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}\right)^2+1}\,dt\\ &= \int\frac{\sin\omega_k}{u^2+1}\,du \quad \text{avec } u=\frac{t-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}, \quad du=\frac{dt}{\sin\omega_k}\\ &= \sin\omega_k\cdot\text{Arctan}\,\frac{t-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}\end{aligned}$$

Déterminons les limites :

— $\boxed{t\to 0}$ $\text{Arctan}\,\frac{t-\cos\omega_k}{\sin\omega_k} \to \text{Arctan}\,\frac{-\cos\omega_k}{\sin\omega_k} = \text{Arctan}\left(\tan(\omega_k-\frac{\pi}{2})\right) = \omega_k-\frac{\pi}{2}$
(car $\omega_k-\frac{\pi}{2}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ puisque $0\leqslant k\leqslant n-1 \Rightarrow \omega_k\in]0,\pi[$)

— $\boxed{t\to+\infty}$ $\text{Arctan}\,\frac{t-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}\to\frac{\pi}{2}$ (dans les mêmes conditions $\sin\omega_k>0$)

— Ainsi, quand x tend vers 0 :

$$\int_x^{1/x}\frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2t\cos\omega_k+1}\,dt = \sin\omega_k\left(\underbrace{\text{Arctan}\,\frac{\frac{1}{x}-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}}_{\to\pi/2}-\underbrace{\text{Arctan}\,\frac{x-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}}_{\to\omega_k-\pi/2}\right)$$

montre que $\boxed{\lim_{x\to0^+}\int_x^{1/x}\frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2t\cos\omega_k+1}\,dt = (\pi-\omega_k)\sin\omega_k}$

4. (a) Soit $\theta\not\equiv 0\ [\pi]$, $C_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left((2k+1)\theta\right)$ et $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left((2k+1)\theta\right)$ sont les parties réelle et imaginaire de $\sum_{k=0}^{n+1}e^{i(2k+1)\theta}$, somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i2\theta}\neq 1$. Ainsi :

$$C_n+iS_n=\frac{e^{i(2n+1)\theta}-e^{i\theta}}{e^{i2\theta}-1}=e^{i\theta}\frac{e^{in\theta}(e^{in\theta}-e^{-in\theta})}{e^{i\theta}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}=e^{in\theta}\frac{2i\sin(n\theta)}{2i\sin(\theta)}$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left((2k+1)\theta\right)=\frac{\sin(2n\theta)}{2\sin(\theta)} \quad\text{et}\quad \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left((2k+1)\theta\right)=\frac{\sin^2(n\theta)}{\sin(\theta)}}$$

(b) En dérivant la première égalité par rapport à θ, on obtient (après changement de signe)

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\sin\left((2k+1)\theta\right)=\frac{\sin(2n\theta)\cos(\theta)-2n\cos(2n\theta)\sin(\theta)}{2\sin^2(\theta)}$$

Avec $\theta=\frac{\pi}{2n}$, ce qui précède donne

— $\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2n}=\frac{\sin^2(n\frac{\pi}{2n})}{\sin\frac{\pi}{2n}}$ soit $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\sin\omega_k=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}}$

— $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\sin(2k+1)\frac{\pi}{2n}=\frac{\sin(\frac{2n\pi}{2n})\cos(\frac{\pi}{2n})-2n\cos(\frac{2n\pi}{2n})\sin(\frac{\pi}{2n})}{2\sin^2(\frac{\pi}{2n})}$

soit, en multipliant par $\frac{\pi}{2n}$ $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\sin\omega_k=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2n}}}$

(c) Comme $\varphi_n(x)=\frac{1}{2}\int_x^{1/x}\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,dt=\frac{1}{2}\int_x^{1/x}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2t\cos\omega_k+1}\,dt$
$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{\int_x^{1/x}\frac{\sin^2\omega_k}{t^2-2t\cos\omega_k+1}\,dt}_{\to(\pi-\omega_k)\sin\omega_k}$ nous avons $\lim_{x\to0^+}\varphi_n(x)=$
$\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\omega_k-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\sin\omega_k$
$=\frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}-\frac{1}{n}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}$

Conclusion $\boxed{\lim_{x\to0^+}\varphi_n(x)=\frac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}}$

Exercice 5

1. Des intégrations par parties (les fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) donnent rapidement

$$\boxed{f_1(x)=x\,\text{ch}(x)-\text{sh}(x) \quad\text{et}\quad f_2(x)=-3x\,\text{ch}(x)+(x^2+3)\,\text{sh}(x)}$$

2. En remarquant que, pour $n\geqslant 2$, $f'_{n-1}(t)=t\,f_{n-2}(t)$, nous pouvons écrire :

$$\int_0^x\underbrace{t^2}_{=u(t)}\ \underbrace{t\,f_{n-2}(t)}_{=f'_{n-1}(t)}\,dt=\left[t^2f_{n-1}(t)\right]_0^x-\int_0^x 2t\,f_{n-1}(t)\,dt \qquad (u,f_{n-1}\in\mathcal{C}^1)$$

soit enfin $\boxed{\forall n\geqslant 2,\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \int_0^x t^3 f_{n-2}(t)\,dt = x^2 f_{n-1}(x)-2f_n(x)}$

3. La question **-1-** amorce une récurrence puisque nous avons
$$f_2(x) = -3\,\big(x\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big) + x^2\ \mathrm{sh}(x) = -3\,f_1(x) + x^2\,f_0(x)$$
Étudions l'hérédité : pour $n \geqslant 2$, si $f_n(x) = -(2n-1)\,f_{n-1}(x) + x^2\,f_{n-2}(x)$, alors :
$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_0^x t\,f_n(t)\,dt = -(2\,n-1)\int_0^x t\,f_{n-1}(t)\,dt + \int_0^x t^3\,f_{n-2}(t)\,dt \\ &= -(2\,n-1)\,f_n(x) + x^2\,f_{n-1}(x) - 2f_n(x) \\ &= -(2\,n+1)\,f_n(x) + x^2\,f_{n-1}(x) \qquad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

4. La question **-1-** confirme que, pour $n = 0, 1$ et 2, $f_n(x)$ est bien de la forme
$f_n(x) = \big(Q_n\,\mathrm{sh} - P_n\,\mathrm{ch}\big)\,(x)$. Confirmons ceci par récurrence : $\forall\ n \geqslant 2$
$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= -(2\,n+1)\,f_n(x) + x^2\,f_{n-1}(x) \\ &= -(2\,n+1)\,\big(Q_n\,\mathrm{sh} - P_n\,\mathrm{ch}\big)\,(x) + x^2\,\big(Q_{n-1}\,\mathrm{sh} - P_{n-1}\,\mathrm{ch}\big)\,(x) \\ &= Q_{n+1}(x)\,\mathrm{sh}(x) - P_{n+1}(x)\,\mathrm{ch}(x) \end{aligned}$$
où $\begin{cases} Q_{n+1}(x) = -(2\,n+1)\,Q_n(x) + x^2\,Q_{n-1}(x) \\ P_{n+1}(x) = -(2n+1)P_n(x) + x^2 P_{n-1}(x) \end{cases}$ sont des polynômes.

Conclusion
$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall\ n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall\ x \in \mathbb{R}, & f_n(x) = Q_n(x)\,\mathrm{sh}(x) - P_n(x)\,\mathrm{ch}(x) \\ & Q_{n+1}(x) = -(2\,n+1)\,Q_n(x) + x^2\,Q_{n-1}(x) \\ & P_{n+1}(x) = -(2\,n+1)\,P_n(x) + x^2\,P_{n-1}(x) \end{array}}$$

5. Nous avons déjà $f_1(x)$ et $f_2(x)$, donc Q_1, P_1, Q_2, P_2. Les formules précédentes fournissent les polynômes suivants :
$$\boxed{\begin{array}{cc} Q_1(x) = -1 & P_1(x) = -x \\ Q_2(x) = x^2 + 3 & P_2(x) = 3x \\ Q_3(x) = -6x^2 - 15 & P_3(x) = -x^3 - 15x \\ Q_4(x) = x^4 + 45x^2 + 105 & P_4(x) = 10x^3 + 105x \end{array}}$$

6. (a) En posant $S_n = (-1)^n Q_n$, la formule de récurrence devient
$\forall\ n \geqslant 1,\quad S_{n+1}(x) = (2\,n+1)\,S_n(x) + x^2\,S_{n-1}(x)$,
soit encore $\boxed{\forall\ n \geqslant 2,\quad \forall\ x \in \mathbb{R},\quad S_n(x) = (2\,n-1)\,S_{n-1}(x) + x^2\,S_{n-2}(x)}$

(b) Ce résultat est valable pour $x = 0$.
La suite $\big(S_n(0)\big)$ vérifie : $\forall\ n \geqslant 2,\quad S_n(0) = (2\,n-1)\,S_{n-1}(0)$
$S_1(0) = -Q_1(0) = 1$
$S_2(0) = 3\ S_1(0) = 3 \times 1$
$S_3(0) = 5\ S_2(0) = 5 \times 3 \times 1$
Une récurrence évidente donne $\boxed{S_n(0) = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n\,n!}}$

(c) S_1, S_2, S_3, S_4 sont des polynômes pairs à coefficients entiers naturels.
La formule de récurrence du **-6-b-** montre que cette propriété est héréditaire.
Conclusion $\boxed{S_n \text{ est un polynôme pair à coefficients dans } \mathbb{N}}$

(d) S_n étant pair à coefficients positifs, il est clair que le minimum de $S_n(x)$ est obtenu pour $x = 0$. $\boxed{\text{Le minimum de } S_n \text{ est } S_n(0) = \frac{(2n)!}{2^n\,n!}}$

7. La fonction $f_0 = \mathrm{sh}$ est croissante donc : $\forall\ x \geqslant 0,\quad 0 \leqslant f_0(x) \leqslant \frac{x^0}{2^0\,0!}\ \mathrm{sh}(x)$.
Confirmons cet encadrement par récurrence : si $\forall\ x \geqslant 0,\quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{2^n\,n!}\ \mathrm{sh}(x)$
alors $\forall\ t \in [0, x],\quad 0 \leqslant t\,f_n(t) \leqslant \frac{t^{2n+1}}{2^n\,n!}\ \mathrm{sh}(t) \leqslant \frac{\mathrm{sh}(x)}{2^n\,n!}\,t^{2n+1}$
en intégrant entre 0 et x (avec $0 \leqslant x$), il vient :
$$0 \leqslant f_{n+1}(x)\,dt \leqslant \frac{\mathrm{sh}(x)}{2^n\,n!}\int_0^x t^{2n+1}\ \mathrm{sh}(t)\,dt = \frac{\mathrm{sh}(x)}{2^n\,n!}\,\left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^x$$
ce qui confirme l'hérédité. $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\quad \forall\ x \geqslant 0,\quad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{2^n\,n!}\ \mathrm{sh}(x)}$

8. Il est clair que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction impaire (c'est vrai pour f_0, f_1, f_2 et l'hérédité est immédiate). le résultat précédent s'écrit $\underline{\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \big|f_n(x)\big| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{2^n\,n!}\,\big|\mathrm{sh}(x)\big|}$. Comme $f_n(x) = Q_n(x)\ \mathrm{ch}(x)\ \Big(\mathrm{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\Big)$,
et $\frac{(2n)!}{2^n\,n!} \leqslant \big|S_n(x)\big| = \big|Q_n(x)\big|$,
il vient $\frac{(2n)!}{2^n\,n!}\,\big|\mathrm{ch}(x)\big|\,\Big|\mathrm{sh}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\Big| \leqslant \big|f_n(x)\big| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{2^n\,n!}\,\big|\mathrm{sh}(x)\big|$
d'où $\Big|\mathrm{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\Big| \leqslant \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\,\big|\mathrm{th}(x)\big|$.
La concavité de la fonction " th " montre que $\big|\mathrm{th}(x)\big| \leqslant |x|$.

Conclusion $\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\quad \forall\ x \in \mathbb{R},\quad \Big|\mathrm{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\Big| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n)!}}$