

# Devoir Surveillé 09

Le lundi 27 Avril 2026

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

**L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.**

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

## Exercice 1

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille  $(f_0, f_1, f_2)$  est une base de  $E$ , les fonctions  $f_0, f_1, f_2$  étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_0(t) = 1 \quad f_1(t) = t \quad f_2(t) = t^2$$

On considère l'application  $\varphi$  qui, à toute fonction  $P$  de  $E$ , associe la fonction, notée  $\varphi(P)$ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt$$

1. (a) Montrer que  $\varphi$  est linéaire.
- (b) Déterminer  $(\varphi(f_0))(x)$ ,  $(\varphi(f_1))(x)$  et  $(\varphi(f_2))(x)$  en fonction de  $x$ , puis écrire  $\varphi(f_0)$ ,  $\varphi(f_1)$  et  $\varphi(f_2)$  comme combinaison linéaire de  $f_0, f_1$  et  $f_2$ .
- (c) Dédire des questions précédentes que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. (a) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $(f_0, f_1, f_2)$ . On vérifiera que la première ligne de  $A$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- (b) Justifier que  $\varphi$  est un automorphisme de  $E$ .
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe un réel  $u_n$  tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner  $u_0$  et établir que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$ .

- (b) En déduire, par sommation, l'expression de  $u_n$  pour tout entier  $n$ .
- (c) Écrire  $A^n$  sous forme de tableau matriciel.

**Exercice 2**

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f$ .
2. (a) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $D$  et démontrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $D$ ,

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2} \varphi(x)$$

où  $\varphi$  est une fonction qu'on précisera.

- (b) Etudier les variations de  $\varphi$  sur  $D$ . En déduire le signe de  $\varphi$ .
- (c) En déduire les variations de  $f$  sur  $D$ .
3. (a) Donner un développement limité de  $\operatorname{ch} x$  à l'ordre 3 au voisinage de 0.
- (b) Montrer qu'un développement limité de  $f$  à l'ordre 2 au voisinage de 0 est donné par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

- (c) En déduire que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On appellera encore  $f$  le prolongement ainsi obtenu.
- (d) Donner l'équation de la tangente  $\mathcal{T}_0$  à  $\mathcal{C}$  ainsi que la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{T}_0$  au voisinage de 0.
4. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
5.  $f$  est-elle dérivable en 0 ?
6. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
7. Donner l'allure de la courbe.

**Exercice 3**

$E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble de ses endomorphismes.

**Partie -A-**

Dans cette partie,  $E$  est de base  $\mathcal{B} = (i, j, k)$ .

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme de matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  en base  $\mathcal{B}$ .

1. Déterminer le noyau de  $\varphi$  (on en donnera la nature et une base).  
En déduire la nature et une base de  $\operatorname{Im}(\varphi)$ . En donner une équation cartésienne.  
Montrer que  $\operatorname{Ker}(\varphi) \oplus \operatorname{Im}(\varphi) = E$ .
2. Montrer que la restriction de  $\varphi$  à  $\operatorname{Im} \varphi$  est une homothétie vectorielle (autrement dit de la forme  $\lambda Id$ ).  
En déduire que  $\varphi \circ \varphi = -3\varphi$ .
3. On note  $f_\lambda = \lambda\varphi$  et  $\mathcal{F} = \{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\}$ .  
Calculer  $f_\lambda \circ f_{\lambda'}$  et vérifier son appartenance à  $\mathcal{F}$ .  
En déduire que  $(\mathcal{F}, \circ)$  est un groupe abélien. On précisera l'élément neutre et le symétrique de  $f_\lambda$ . L'élément neutre de  $\mathcal{F}$  est-il un automorphisme ?  
Montrer que  $f_\lambda$  vérifie une équation de la forme  $f^2 = af$ , où  $a$  est un réel que l'on précisera.

**Partie -B-**

Dans cette partie,  $E$  est de dimension quelconque et  $a$  un réel non nul. On considère l'équation ( $\mathcal{E}$ ) :  $f^2 = a f$  d'inconnue  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Soit  $p$  une projection vectorielle et  $h$  une homothétie vectorielle de rapport  $a$ . Montrer que, si  $f = p \circ h$ , alors  $f^2 = a f$ .
2. Établir la réciproque et en déduire les solutions de l'équation  $\mathcal{E}$ .

**Exercice 4**

1.  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère la fonction  $\gamma_n : \begin{cases} ]0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_x^{1/x} \frac{1}{1+t^{2n}} dt \end{cases}$

- (a) Montrer que  $\gamma_n$  est définie, monotone.
- (b) Justifier que  $\gamma_n$  est dérivable et calculer sa dérivée.

Confirmer le sens de variation obtenu au **1-a**.

2. Montrer :

$$\gamma_n(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$$

3. Soit  $\omega_k = (2k+1) \frac{\pi}{2n}$ .

- (a) Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(t)$  la fraction

$$\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}$$

- (b) En déduire que

$$\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2t \cos \omega_k + 1}$$

- (c) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{1/x} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2t \cos \omega_k + 1} dt = (\pi - \omega_k) \sin \omega_k$$

4. (a) Montrer que pour tout réel  $\theta$  non congru à 0 modulo  $\pi$ ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)\theta) = \frac{\sin(2n\theta)}{2 \sin(\theta)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\theta) = \frac{\sin^2(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

- (b) Utiliser ce qui précède (et une dérivation) pour trouver les expressions de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \omega_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \sin \omega_k$$

- (c) En déduire la valeur exacte de  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \gamma_n(x)$ .

**Exercice 5**

On se propose de déterminer des fractions rationnelles qui approchent la fonction th.

On considère la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f_0(x) = \operatorname{sh}(x) \\ \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \int_0^x t f_n(t) dt \end{cases}$$

1. Calculer  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$ .
2. Montrer avec une intégration par parties que

$$\forall n \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x t^3 f_{n-2}(t) dt = x^2 f_{n-1}(x) - 2 f_n(x)$$

3. En déduire par récurrence que

$$\forall n \geq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = -(2n-1) f_{n-1}(x) + x^2 f_{n-2}(x)$$

4. Montrer que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe des polynômes  $P_n$  et  $Q_n$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = Q_n(x) \operatorname{sh}(x) - P_n(x) \operatorname{ch}(x)$$

On précisera la relation de récurrence que vérifie  $Q_n$ .

5. Calculer  $P_n$  et  $Q_n$  pour  $n = 3$  et  $n = 4$ .
6. On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = (-1)^n Q_n$ .
  - (a) Vérifier que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad S_n(x) = (2n-1) S_{n-1}(x) + x^2 S_{n-2}(x)$
  - (b) Calculer  $S_n(0)$  en fonction de  $n$ .
  - (c) Montrer que  $S_n$  est un polynôme pair à coefficients dans  $\mathbb{N}$ .
  - (d) Quelle est la valeur minimale de  $S_n$  sur  $\mathbb{R}$ ?
7. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^{2n}}{2^n n!} \operatorname{sh}(x)$$

8. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \operatorname{th}(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n)!}$$