Devoir Surveillé 08

Le vendredi 29 Mars 2024

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

E désigne l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{B} = \{\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}\}$. Soit enfin d l'application qui à toute fonction f associe sa dérivée f'. On sait que d est linéaire.

1. (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.
   (b) Montrer que d est un endomorphisme de F. Est-ce un automorphisme de F ?
2. Soit Id l'application identique de F, et $f = d - \mathrm{Id}$.
   (a) Écrire l'expression analytique de f dans la base $\mathcal{B}$ (on notera α,β,γ,δ les coordonnées des éléments de F dans cette base).
   (b) Déterminer le noyau de f.
   En déduire les solutions dans F de l'équation différentielle $y' - y = 0$.
   (c) On note φ la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = e^{-x}$.
   Montrer que $\{\sin, \cos, \varphi\}$ est une base de l'image de f.
   Calculer un antécédent par f de ces trois fonctions.
   En déduire les solutions dans F de : $y' - y = e^{-x} + \sin(x)$.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction g_n par : $\forall x \in [n, +\infty[,\ g_n(x) = \int_n^x e^{t^2} dt$.

1. *Étude de g_n.*
   (a) Montrer que g_n, est dérivable sur son domaine et donner son sens de variation.
   (b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} g_n(x)$.
   (c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté x_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $g_n(x_n) = 1$.
2. *Étude de la suite (x_n).*
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-x_n^2} \leqslant x_n - n \leqslant e^{-n^2}$.
3. On pose $u_n = x_n - n$
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n$.
   (c) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b que $x_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-n^2}$

Exercice 3
On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de "pile" soit égale à p , $p \in]0;1[$.
On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de " 6" obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :
— Z indique le nombre de "6" obtenus aux lancers du dé,
— X indique le nombre de "piles" obtenus aux lancers de la pièce,
— Y indique le nombre de "faces" obtenues aux lancers de la pièce.
Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k/Z = n)$. On distinguera les cas : $k \leq n$ et $k > n$.
3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
   — si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors $P\left(X = k \text{ et } Z = n\right) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} \cdot p^k\left(1-p\right)^{n-k}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$
   — si $n > N$ ou $k > n$ alors $P\left(X = k \text{ et } Z = n\right) = 0$
4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$
5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$:
$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$$
   En déduire la probabilité $P(X = k)$.
6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \dfrac{p}{6})$.
   Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
   Déterminer la loi du couple (X, Y) autrement dit pour toute valeur x de $X(\Omega)$ et toute valeur de y de $Y(\omega)$, calculer $P((X = x) \cap (Y = y))$.

Exercice 4
Les parties I, II et III sont, dans une large mesure, indépendantes

Soit n un entier naturel non nul.

Partie I

On pose : $A = \left(X+1\right)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'on peut écrire : $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.
2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$, et les autres racines $z_1, z_2, \cdots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

   Onpose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \dfrac{k\pi}{2n}$.

3. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \dfrac{k\pi}{2n}$

   En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \dfrac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.
4. Calculer, de deux façons : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis, en déduire Q_n et enfin P_n.
5. On pose $F = \dfrac{1}{A}$. Déterminer la décomposition de F en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Partie II

On travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E supposé non réduit au vecteur nul.
$\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.
Id_E désigne l'application identique de E et θ l'application nulle.
Par convention : $\forall\, f \in \mathcal{L}(E), \quad f^0 = \mathrm{Id}_E$.

On étudie, sur quelques cas particuliers, l'équation :

$$\left(f + \mathrm{Id}_E\right)^{2n} - \mathrm{Id}_E = \theta \quad \text{où} \quad f \in \mathcal{L}(E) \text{ est l'inconnue.}$$

6. Déterminer les homothétie vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée.
7. En développant $(1+1)^{2n}$ et $(1-1)^{2n}$, déterminer les sommes $S = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 2n \\ 2k \end{pmatrix}$ et $S' = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 2n \\ 2k+1 \end{pmatrix}$

   (La notation $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ désigne le coefficient binomial $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$)
8. Si s est une symétrie de E, exprimer $\left(s + \mathrm{Id}_E\right)^{2n} - \mathrm{Id}_E$ en fonction de s et Id_E.
   En déduire les symétries de E qui sont solutions de l'équation proposée.

Partie III

On travaille dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.
I désigne la matrice identité et 0 la matrice nulle.

On pose $G = \left\{ M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \text{ --- } (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$ où $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

9. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base. Vérifier que G est stable pour le produit matriciel.

   On cherche à résoudre l'équation matricielle $\quad (*)\ (M+I)^{2n} - I = 0 \quad$ avec M matrice inconnue dans G.

   On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

   Soit $M = M_{a,b}$ un élément de E tel que $b \neq 0$, u l'endomorphisme associé à M et Id_E l'application identique de E.

10. Déterminer une base (e'_1) de $E_1 = \mathrm{Ker}\,\big(u - (a+2b)\,\mathrm{Id}_E\big)$.
11. Déterminer une base (e'_2, e'_3) de $E_2 = \mathrm{Ker}\,\big(u - (a-b)\,\mathrm{Id}_E\big)$.
12. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E. On la note $\mathcal{B}'$.
13. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
14. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
    Écrire P et déterminer P^{-1} en précisant la méthode utilisée et en détaillant les calculs.
15. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.
16. Montrer que : M est solution de l'équation (*) si et seulement si D est solution de l'équation (*).
17. Déterminer toutes les matrices D solutions de l'équation (*).
18. En déduire toutes les solutions de l'équation (*) dans G.