Devoir Surveillé 08 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. (a) Par définition de F nous pouvons dire que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F.

Il reste à montrer que cette famille est libre :

si $\alpha \sin + \beta \cos + \gamma \operatorname{sh} + \delta \operatorname{ch} = 0$ (fonction nulle), en dérivant deux fois il vient

$-\alpha \sin - \beta \cos + \gamma \operatorname{sh} + \delta \operatorname{ch} = 0.$

Par addition et soustraction, on en déduit : $\begin{cases} \alpha \sin + \beta \cos = 0 & (1) \\ \gamma \operatorname{sh} + \delta \operatorname{ch} = 0 & (2) \end{cases}$

Utilisons (1) : en prenant les images de $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, (1) il vient $\alpha = \beta = 0$

Utilisons (2) : l'images de $x = 0$ donne $\delta = 0$. Il reste $\gamma \operatorname{sh} = 0$ d'où $\gamma = \delta = 0$

La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de F $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } F}$

(b) Nous savons que la dérivation est linéaire. Il suffit de vérifier que $d(F) \subset F$:

$\forall\ \psi \in F, \quad \exists\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \psi = \alpha \sin + \beta \cos + \gamma \operatorname{sh} + \delta \operatorname{ch}$

Alors $d(\psi) = -\beta \sin + \alpha \cos + \delta \operatorname{sh} + \gamma \operatorname{ch} \in F$ $\boxed{d \in \mathcal{L}(F)}$

D'autre part, d transforme la base $\mathcal{B}$ en $d(\mathcal{B})$, qui est une base de F (identique à $\mathcal{B}$, à l'ordre prés et avec un changement de signe). d et bijective. $\boxed{d \in GL(F)}$

2. (a) Soit $f = d - \mathrm{Id}$. Nous avons $\forall\ \psi \in F \quad f(\psi) = d(\psi) - \psi$.

L'expression analytique est alors évidente :

$\psi\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{/\mathcal{B}} \mapsto f(\psi)\ (\alpha', \beta', \gamma', \delta')_{/\mathcal{B}}$ $\boxed{f \begin{cases} \alpha' = & -\alpha & -\beta & & \\ \beta' = & \alpha & -\beta & & \\ \gamma' = & & & -\gamma & +\delta \\ \delta' = & & & \gamma & -\delta \end{cases}}$

(b) L'expression analytique nous donne immédiatement une caractérisation des éléments du noyau : $\boxed{\psi\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{/\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0, \gamma = \delta}$

Note : le noyau est donc la droite vectorielle engendrée par $\operatorname{sh} + \operatorname{ch} = \exp$

Soit $\psi \in F$. ψ est solution de $y' - y = 0 \Leftrightarrow \psi' - \psi = 0 \Leftrightarrow f(\psi) = 0 \Leftrightarrow \psi \in \operatorname{Ker}(f)$.

$\boxed{\text{Les solutions } \underline{\text{dans } F} \text{ de } y' - y = 0 \text{ sont : } \quad x \mapsto \lambda e^x, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$

(c) La fonction φ est définie par $\varphi(x) = e^{-x}$ donc $\boxed{\varphi = \operatorname{ch} - \operatorname{sh}}$

Utilisons l'expression analytique pour déterminer l'image de f :

$\psi\ (\alpha', \beta', \gamma', \delta')_{/\mathcal{B}} \in \operatorname{Im}(f) \Leftrightarrow \exists\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tq

$$\begin{cases} \alpha' = & -\alpha & -\beta & & \\ \beta' = & \alpha & -\beta & & \\ \gamma' = & & & -\gamma & +\delta \\ \delta' = & & & \gamma & -\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha' + \beta' & = 2\alpha \\ -\alpha' - \beta' & = 2\beta \\ \gamma' + \delta' & = 0 \\ \delta' & = \gamma - \delta \end{cases}$$

Les solutions existent si et seulement si $\boxed{\delta' = -\gamma'}$. Les éléments de $\operatorname{Im}(f)$ sont les éléments de la forme $\alpha' \sin + \beta' \cos + \delta' (-\operatorname{sh} + \operatorname{ch}) = \alpha' \sin + \beta' \cos + \delta' \varphi$

Nous en déduisons que $\operatorname{Im}(f)$ est engendrée par $(\sin, \cos, \varphi)$

D'autre part, $\mathcal{B}$ libre montre que cette famille est libre puisque :

$\alpha \sin + \beta \cos + \gamma \varphi = 0 \Leftrightarrow \alpha \sin + \beta \cos - \gamma \operatorname{sh} + \gamma \operatorname{ch} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

Conclusion $\boxed{(\sin, \cos, \varphi) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f)}$

L'expression analytique fournit facilement les antécédents cherchés :

par exemple,pour la fonction "sin" : $\begin{cases} 1 = & -\alpha & -\beta & & \\ 0 = & \alpha & -\beta & & \\ 0 = & & & -\gamma & +\delta \\ 0 = & & & \gamma & -\delta \end{cases}$

on peut prendre $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = \delta = 0$ $\boxed{\sin = f\left(-\frac{1}{2}(\sin + \cos)\right)}$

De même, on trouve $\boxed{\cos = f\left(\frac{1}{2}(\sin - \cos)\right) \quad \text{et} \quad \varphi = f(\operatorname{sh})}$

$\underline{\text{Dans } F}$, l'équation $y' - y = e^{-x} + \sin(x)$

est équivalente à $f(y) = f(\operatorname{sh}) + f\left(-\frac{1}{2}(\sin + \cos)\right)$

donc, par linéarité à $f\left(y - \operatorname{sh} + \frac{1}{2}(\sin + \cos)\right) = 0.$

soit enfin à $y - \operatorname{sh} + \frac{1}{2}(\sin + \cos) \in \operatorname{Ker}(f)$.

Les solutions $\underline{\text{dans } F}$ de l'équation sont $\boxed{y = \operatorname{sh} - \frac{1}{2}(\cos + \sin) + \lambda \exp \quad \lambda \in \mathbb{R}}$

Exercice 2

1. (a) $\varphi : t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $[n + \infty[$. g_n est la primitive de φ qui s'annule en n. g_n est bien dérivable sur $[n + \infty[$ et $g_n'(x) = e^{x^2} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction g_n est donc strictement croissante sur $[n + \infty[$.

(b) Comme g_n est croissante, on sait que soit $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x) = +\infty$, soit $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \geq n \geq 0$, on a : $\forall t \in [nx]$, $e^{t^2} \geq 1$, et donc $g_n(x) \geq x - n$, par positivité de l'intégrale (les bornes étant en ordre croissant). Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-n) = +\infty$, on obtient par minoration : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = +\infty$.

(c) La fonction g_n est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[n+\infty[$. La fonction g_n réalise donc une bijection de $[n+\infty[$ sur $[g_n(n)\lim_{+\infty} g_n[=[0+\infty[$. Comme $1 \in [0+\infty[$, il existe bien un unique réel x_n de $[n+\infty[$ tel que $g_n(x_n) = 1$.

2. (a) Par définition de x_n, on a : $x_n \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de x_n, on a : $\displaystyle\int_n^{x_n} e^{t^2} \partial t = 1$. Pour tout $t \in [nx_n]$, on a : $e^{n^2} \leq e^{t^2} \leq e^{x_n^2}$, par croissance de la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. Par croissance de l'intégrale, avec $n \leq x_n$, on obtient : $\displaystyle\int_n^{x_n} e^{n^2} \partial t = e^{n^2}.(x_n - n) \leq 1 \leq \int_n^{x_n} e^{x_n^2} \partial t = e^{x_n^2}(x_n - n)$. La première inégalité donne $x_n - n \leq e^{-n^2}$ et la seconde donne $e^{-x_n^2} \leq x_n - n$. L'encadrement proposé est donc bien vérifié.

3. (a) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x_n^2} = 0$. On a également $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n^2} = 0$. Le théorème d'existence d'une limite par encadrement appliqué à l'encadrement de la question précédente montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - n) = 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq n$. On déduit de 2.b que : $0 \leq nu_n \leq ne^{-n^2}$. Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-n^2} = 0$. Par encadrement, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

(c) On déduit de 2.b que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $e^{-x_n^2+n^2} \leq u_n e^{n^2} \leq 1$.
On a : $-x_n^2 + n^2 = -(n + x_n).u_n$. On remarque que : $0 \leq (x_n + n)u_n \leq 2nu_n$ (car $x_n \geq n$ et $u_n \geq 0$). D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$. On déduit du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n + n)u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x_n^2+n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-(x_n+n)u_n} = 1$ par continuité de la fonction exponentielle en 0. Par encadrement, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n e^{n^2} = 1$, ce qui signifie que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n^2}$.

Exercice 3

1. Z est le **nombre de** 6 obtenus en N lancers **indépendants** avec pour chaque lancer la **même probabilité** 1/6 d'obtenir 6 (car les faces du dé sont équiprobables).
Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1/6)$.

2. Quand $Z = n$, (conditionnement) on effectue n lancers indépendants de la pièce avec une probabilité de pile de p. Donc le nombre X de piles obtenus suit une loi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. i.e. **si** $k \in [[0,n]]$, $p(X = k/Z = n) = \binom{n}{k} \cdot p^k q^{n-k}$ et $p(X = k/Z = n) = 0$ sinon.

3. Montrer que pour tout couple d'entier naturels (k, n) :
On a $p(X = k \text{ et } Z = n) = p(X = k \cap Z = n) = p(Z = n) \cdot p(X = k/Z = n)$ donc
— si $0 \leq k \leq n \leq N$ alors

$$p(X = k \text{ et } Z = n) = \binom{N}{n} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \binom{n}{k} \cdot .p^k(1-p)^{n-k}$$

— si $n > N$ alors $Z = n$ est impossible de même si $k > n$, $(X = k \cap Z = n)$ est impossible donc la probabilité est nulle.

4. Calculer la probabilité $p(X = 0)$ idée elle dépend de la valeur de Z d'où probab totales avec comme système complet d'évènements les valeurs possibles de Z.
$(Z = n)_{n\in[[0,N]]}$ est un système complet d'évènements donc

$$\begin{aligned}
p\,(X = 0) &= \sum_{n=0}^{N} p(Z = n) \cdot p(X = 0/Z = n) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \binom{n}{0} \cdot p^0 q^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{q}{6}\right)^n = \left(\frac{5+q}{6}\right)^N
\end{aligned}$$

5. On calcule de part et d'autre : comme $0 \leq k \leq n \leq N$, les coefficients peuvent s'écrire en factorielles.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \cdot \binom{N}{n} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{N!}{n!\,(N-n)!} = \frac{N!}{k!\,(n-k)!\,(N-n)!} \\
\binom{N}{k} \cdot \binom{N-k}{n-k} &= \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \cdot \frac{(N-k)!}{(n-k)!\,(N-k-(n-k))!} = \frac{N!}{k!\,(n-k)!\,(N-n)!}
\end{aligned}$$

donc $\binom{n}{k} \cdot \binom{N}{n} = \binom{N}{k} \cdot \binom{N-k}{n-k}$

$(Z=n)_{n\in[[0,N]]}$ est un système complet d'évènements donc

$$p(X=k)=\sum_{n=0}^{N}p(Z=n)\cdot p(X=k/Z=n)$$

et comme la probabilité conditionnelle dépend de $n\geq k$ ou $n<k$ (il faut regarder par rapport aux valeursde n qui est l'indice de sommation)

$$\begin{aligned}
p(X=k) &= \sum_{n=0}^{k-1}p(Z=n)\cdot p(X=k/Z=n)+\sum_{n=k}^{N}p(Z=n)\cdot p(X=k/Z=n)\\
&= \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1}}_{n<k}0+\underbrace{\sum_{n=k}^{N}}_{n\geq k}\binom{N}{n}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\binom{n}{k}\cdot .p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{n=k}^{N}\binom{N}{n}\cdot\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\cdot .p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{n=k}^{N}\binom{N}{k}\cdot\binom{N-k}{n-k}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\cdot .p^k(1-p)^{n-k}\ \text{réindexé } i=n-k\\
&= p^k\cdot\binom{N}{k}\cdot\sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{N-i-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{i+k}(1-p)^i\\
&\quad \text{on regroupe les puissances en faisant apparaître } N-k-i \text{ et } i\\
&= p^k\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\cdot\binom{N}{k}\cdot\sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-i}\left(\frac{1-p}{6}\right)^{i}\\
&= \binom{N}{k}\cdot\left(\frac{p}{6}\right)^{k}\left(\frac{5+1-p}{6}\right)^{N-k}=\binom{N}{k}\cdot\left(\frac{p}{6}\right)^{k}\left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}
\end{aligned}$$

6. On reconnait bien ici une loi binômiale de paramètres $(N,p/6)$

   En inversant les rôles de *pile* et de *face* on obtient de même que Y suit une loi binômiale de paramêtres $(N,q/6)$

7. $p(X=N$ et $Y=N)=0$ car $(X=N\cap Y=N)$ est impossible (on aurait $2N$ lancers)

   Or ni $p(X=N)$ ni $p(Y=N)$ ne le sont donc $p(X=N)\cdot p(Y=N)$ n'est pas nul.

   Donc $p(X=N\cap Y=N)\neq p(X=N)\cdot p(Y=N)$ et X et Y ne sont pas indépendantes.

Pour calculer $p(X=x\cap Y=y)$ il faut connaître la valeur de $Z\ldots$ or $Z=X+Y$
donc $(X=x\cap Y=y)=(X=x\cap Z=x+y)$

et $p(X=x\cap Y=y)=p(X=x\cap Z=x+y)=p(X=x/Z=x+y)\cdot p(Z=x+y)$

Cette quantité est donc nulle si $x+y>N$ et sinon, elle vaut :

$$p(X=x\cap Y=y)=\binom{x+y}{x}\cdot p^xq^y\cdot\binom{N}{x+y}\left(\frac{1}{6}\right)^{x+y}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-x-y}$$

Exercice 4

Partie I

1. Par la formule du binôme de Newton, on a $A=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}X^k-1=\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}X^k=XB$

   Conclusion $\boxed{A=X\,B\quad\text{avec}\quad B=\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}X^{k-1}}$

   $\boxed{B\text{ est normalisé, de degré }2n-1,\quad\text{la constante } b_0=2n}$

2. $z\in\mathbb{C}$ est racine de A si et seulement si $(z+1)^{2n}=1$ donc si et seulement si $z+1$ est une racine $2n^{\text{ème}}$ de l'unité, soit :

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad z+1=e^{k\,i\,\frac{2\pi}{2n}}\qquad k\in[\![0,2n-1]\!]\\
&\Leftrightarrow\quad z=e^{i\,k\,\pi/2n}\left(e^{i\,k\,\pi/2n}-e^{-i\,k\,\pi/2n}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad z=2\,i\,\sin\frac{k\,\pi}{2n}\,e^{i\,k\,\pi/2n}
\end{aligned}$$

   Comme $i=e^{i\,\pi/2}$: $\boxed{\text{les zéros de } A \text{ sont }\begin{cases} z_0=0\\ z_k=2\,\sin\dfrac{k\,\pi}{2n}\,e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)} & k\in[\![1,2n-1]\!]\end{cases}}$

3. On pose $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{2n}$ et $Q_n=\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\dfrac{k\pi}{2n}$. Avec $k=2n-l$ il vient

$$P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\prod_{l=2n-1}^{n+1}\sin\frac{(2n-l)\pi}{2n}=\prod_{l=n+1}^{2n-1}\sin\left(\pi-\frac{l\pi}{2n}\right)=\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

   Ainsi, il vient : $Q_n=\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\dfrac{k\pi}{2n}=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{2n}\times\underbrace{\sin\dfrac{n\pi}{2n}}_{=1}\times\underbrace{\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\dfrac{k\pi}{2n}}_{=P_n}=(P_n)^2$ Comme, pour $k\in[\![1,2n-1]\!]$, $0<\dfrac{k\pi}{2n}<$

$\pi \Rightarrow \sin\dfrac{k\pi}{2n} > 0, \quad P_n > 0$ et $\boxed{P_n = \sqrt{Q_n}}$

4. $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ est le produit des zéros du polynôme B. D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé, nous avons donc $Q_n = (-1)^{2n-1}\dfrac{b_0}{1} = -2n$

   D'autre-part, d'après **2** : $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$
   $= \prod_{k=1}^{2n-1}\left(2\sin\dfrac{k\pi}{2n}\, e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)}\right)$
   $= \left(\prod_{k=1} 2n-12\sin\dfrac{k\pi}{2n}\right) e^{i\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)}$
   $= 2^{2n-1} Q_n\ e^{i\alpha} = -2^{2n-1} Q_n$ puisque $\alpha = \dfrac{\pi}{2n}\dfrac{(2n-1)2n}{2} + (2n-1)\dfrac{\pi}{2} = (2n-1)\pi$

   En identifiant les deux résultats, il vient :

   $-2^{2n-1} Q_n = -2n$ d'où $\boxed{Q_n = \dfrac{n}{2^{2n-2}} \quad \text{et} \quad P_n = \sqrt{Q_n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}}$

5. $F = \dfrac{1}{A}$ se décompose facilement puisque tous les zéros sont simples :

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\prod_{k=0}^{2n-1}(X-z_k)} = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\alpha_k}{X-z_k} \quad \text{où} \quad \alpha_k = \frac{1}{A'(z_k)}$$

   Comme $A'(X) = 2n(X+1)^{2n-1}$ et $(z_k+1)^{2n} = 1$ il vient $A'(z_k) = \dfrac{2n}{z_k+1}$.

   Finalement $\dfrac{1}{A} = \sum_{k=0}^{2n-1}\dfrac{\frac{z_k+1}{2n}}{X-z_k}$ d'où $\boxed{\dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\dfrac{z_k+1}{X-z_k} = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\dfrac{e^{ik\pi/n}}{X-z_k}}$

Partie II Étude de l'équation $\left(f+\mathrm{Id}_E\right)^{2n} - \mathrm{Id}_E = \theta$

6. Si f est l'homothétie vectorielle de rapport λ , alors $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.

   L'équation devient $(1+\lambda)^{2n} = \mathrm{Id}_E = \theta \Leftrightarrow (1+\lambda)^{2n} = 1$.

   $\boxed{\text{L'homothétie vectorielles } h_\lambda \text{ est solution} \Leftrightarrow \lambda = z_k \quad k \in [\![0, 2n-1]\!]}$

7. Le binôme de Newton donne $(1+1)^{2n} = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$ et $(1-1)^{2n} = 0 = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}$.

   En ajoutant et en retranchant, on obtient immédiatement les résultats bien connus :
   $2^{2n} = 2\sum_{k=0\ pair}^{2n}\binom{2n}{k} = 2\sum_{k=0\ impair}^{2n}\binom{2n}{k}$ soit
   $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}}$

8. Si s est une symétrie, il est possible d'utiliser le binôme de Newton pour développer $(s+\mathrm{Id}_E)^{2n}$, [ce qui est possible puisque s et Id_E commutent], et le fait que s est involutive [donc $s^{2k} = \mathrm{Id}_E$ et $s^{2k+1} = s$]. Ceci conduit au calcul suivant, en séparant les indices pairs et impairs : $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}s^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}s^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}s^{2k+1}$

   d'où le résultat demandé : $\boxed{(s+\mathrm{Id}_E)^{2n} - \mathrm{Id}_E = 2^{2n-1}s + \left(2^{2n-1}-1\right)\mathrm{Id}_E}$

   Remarque : On peut retrouver ce résultat plus rapidement en remarquant que, si s est une symétrie vectorielle, alors $s+\mathrm{Id}_E = 2p$, où p est la projection associée. Comme une projection est idempotente, le calcul devient alors :
   $\left(s+\mathrm{Id}_E\right)^{2n} - \mathrm{Id}_E = \left(2p\right)^{2n} - \mathrm{Id}_E = 2^{2n}p - \mathrm{Id}_E = 2^{2n-1}(s+\mathrm{Id}_E) - \mathrm{Id}_E$

   Nous en déduisons que, s est solution $\Leftrightarrow s = \dfrac{1-2^{2n-1}}{2^{2n-1}}\mathrm{Id}_E$ qui n'est pas une symétrie. $\boxed{\text{Il n'y a aucune symétrie solution de l'équation}}$

Partie III $G = \left(M_{a,b} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \;—\; a,b\in\mathbb{C}\right)$ $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$

9. Notons $J = M_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

   Il est clair que $M_{a,b} = aI + bJ$ donc G est l'ensemble des combinaisons linéaires de I et J. $G = \mathrm{Vect}\big(I,J\big)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par $\big(I,J\big)$.

   D'autre part, il est tout aussi évident que la famille (I,J) est libre $[\alpha I + \beta J = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0]$ $\boxed{G \text{ est un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel de dimension 2, de base } \big(I,J\big)}$

   Commençons par calculer $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = 2I + J$

   Ainsi, le produit de deux éléments de G donne :

$$\begin{aligned} M_{a,b}M_{a',b'} = (aI+bJ)(a'I+b'J) &= aa'I + (ab'+a'b)J + bb'J^2 \\ &= aa'I + (ab'+a'b)J + bb'(2I+J) \\ &= (aa'+2bb')I + (ab'+a'b+bb')J \in G \end{aligned}$$

Conclusion $\boxed{G \text{ est stable pour le produit matriciel}}$

10. Soit u de matrice $M = M_{a,b}$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

La matrice dans $\mathcal{B}$ de $u - (a+2b)\,\mathrm{Id}_E$ est : $b\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme $b \neq 0$, le noyau s'obtient en résolvant le système $\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = z$ $\boxed{\mathrm{Ker}\,\big(u-(a+2b)\,\mathrm{Id}_E\big) \text{ est la droite de base } e'_1 = e_1+e_2+e_3}$

11. La matrice dans $\mathcal{B}$ de $u - (a-b)\,\mathrm{Id}_E$ est : $b\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $b \neq 0$, le noyau s'obtient en résolvant le système $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x+y+z=0$ $\boxed{\mathrm{Ker}\,\big(u-(a-b)\,\mathrm{Id}_E\big) \text{ est le plan de base } \begin{cases} e'_2 = e_1 - e_2 \\ e'_3 = e_2 - e_3 \end{cases}}$

12. Comme (e'_2, e'_3) est une base du plan d'équation $x+y+z=0$, et que e'_1 n'appartient pas à ce plan [ses coordonnées ne vérifient pas l'équation], la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre.

E étant de dimension 3 : $\boxed{\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est une base de } E}$

13. Nous avons :

$\big(u-(a-b)\,\mathrm{Id}_E\big)\,(e'_1) = 0$, $\big(u-(a-b)\,\mathrm{Id}_E\big)\,(e'_2) = \big(u-(a-b)\,\mathrm{Id}_E\big)\,(e'_3) = 0$

On en déduit immédiatement

$\begin{cases} u'e'_1 = (a+2b)\,e'_1 \\ u(e'_2) = (a-b)\,e'2 \\ u(e'_3) = (a-b)\,e'_3 \end{cases}$ $\boxed{\text{La matrice de } u \text{ dans } \mathcal{B}' \text{ est } D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}}$

14. Ma matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est immédiate. $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

On peut (par exemple) obtenir la matrice inverse en résolvant le système

$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \\ e'_3 = e_2 - e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3e_1 = e'_1 + 2e'_2 + e'_3 \\ 3e_2 = e'_1 - e'_2 + e'_3 \\ 3e_3 = e'_1 - e'_2 - 2e'_3 \end{cases}$ $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$

15. Les formules de changement de base sont bien connues : $\boxed{D = P^{-1}M\,P \quad M = P\,D\,P^{-1}}$

16. Soit l'équation matricielle $(*)$ $(M+I)^{2n} - I = 0$ $M \in G$

Transformons cette équation en utilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned} M \text{ est solution de } (*) &\Leftrightarrow \big(P\,D\,P^{-1}+I\big)^{2n} = I \\ &\Leftrightarrow \big(P\,D\,P^{-1}+P\,I\,P^{-1}\big)^{2n} = I \\ &\Leftrightarrow \big(P\,(D+I)\,P^{-1}\big)^{2n} = I \\ &\Leftrightarrow P\,\big(D+I\big)^{2n}\,P^{-1} = I \end{aligned}$$

car $(P\,A\,P^{-1})^k = P\,A\,P^{-1}P\,A\,P^{-1}\cdots P\,A\,P^{-1} = P\,A^k\,P^{-1}$.

L'équation est donc équivalente à $(D+I)^{2n} = P^{-1}\,I\,P = I$

Conclusion $\boxed{M \text{ est solution de } (*) \Leftrightarrow D = P^{-1}M\,P \text{ est solution de } (*)}$

17. Comme $(D+I)^{2n}$

$$= \begin{pmatrix} a+2b+1 & 0 & 0 \\ 0 & a-b+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-b+1 \end{pmatrix}^{2n} = \begin{pmatrix} (a+2b+1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & (a-b+1)^{2n} \end{pmatrix}$$

Donc, D est solution de $(*)$ si et seulement si $\begin{cases} (a+2b+1)^{2n} - 1 = 0 \\ (a-b+1)^{2n} - 1 = 0 \end{cases}$

c'est-à-dire si et seulement si $(a+2b)$ et $(a-b)$ sont des zéros du polynôme A de la partie **I**, soit encore $\Leftrightarrow \exists\ i, j \in [\![0, 2n-1]\!]$ $\begin{cases} a+2b = z_i \\ a-b = z_j \end{cases}$ $(i \neq j$ pour $b \neq 0)$

Finalement $\boxed{D \text{ est solution de } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{z_i+2z_j}{3} \\ b = \dfrac{z_i - z_j}{3} \end{cases} \quad i \neq j \in [\![1, 2n-1]\!]}$

18. Nous connaissons donc les solutions de $(*)$ si $b \neq 0$.

    Dans le cas $b = 0$, $\quad M_{a,0}$ est la matrice d'une homothétie vectorielle de rapport a.

    $M_{a,0}$ est solution de $(*) \Leftrightarrow a = z_i \quad i \in [\![0, 2n-1]\!]$

    Ceci correspond aux solutions précédentes avec $i = j$.

    $\boxed{\text{Les éléments de } G \text{ solutions de } (*) \text{ sont } M_{\frac{z_i+2z_j}{3}, \frac{z_i-z_j}{3}} \quad i, j \in [\![0, 2n-1]\!]}$