

Devoir Surveillé 08 - Eléments de Correction

Exercice 1**Partie -A-**

1. Il est clair que E est le sous-espace de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées engendré par la famille (I, J) . Puisque I et J ne sont pas colinéaires, elles en forment une base.

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2

2. On trouve $J^2 = J$ et donc $(aI + bJ)(a'I + b'J) = aa'I + (ab' + a'b + bb')J$, ce qui montre que

E est stable par le produit matriciel

3. **Remarque :** le fait que le déterminant ne soit pas nul prouve à priori que A est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mais pas nécessairement dans E .

On doit donc ici résoudre $(aI + bJ)(a'I + b'J) = I$, d'inconnues $(a', b') \in \mathbb{R}^2$. Ceci revient à résoudre $aa'I + (ab' + a'b + bb')J = I$.

La famille $\{I, J\}$ étant libre, ceci équivaut encore à $\begin{cases} aa' & = 1 \\ b a' + (a + b) b' & = 0 \end{cases}$.

Ce système est de Cramer si et seulement si $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & a + b \end{vmatrix} \neq 0$,

donc les éléments de E inversibles dans E sont ceux tels que $a(a + b) \neq 0$

4. De même $X^2 = X \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ 2ab + b^2 = b \end{cases}$ qui a pour solutions O, I, J et $I - J$

Partie -B-

5. En résolvant $K = aI + bJ$ on trouve aisément

$$K = -3I + 4J$$

Supposons qu'il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $K^n = u_n I + v_n J$.

Alors, avec $J^2 = J$, le produit $K^{n+1} = (u_n I + v_n J)(-3I + 4J)$ se

développe aisément en $K^{n+1} = u_{n+1} I + v_{n+1} J$ telle que $\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n \end{cases}$

6. Puisque $K^0 = I = 1I + 0J$, nous avons $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$.

La suite (u_n) est géométrique de raison -3. Il est clair que

$$u_n = (-3)^n$$

Alors $v_{n+1} - v_n = 4(-3)^n$, donc, en ajoutant :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = 4 \sum_{k=0}^{n-1} (-3)^k \Leftrightarrow v_n - v_0 = 4 \frac{1 - (-3)^n}{1 - (-3)}$$

Puisque $v_0 = 0$, on trouve

$$v_n = 1 - (-3)^n$$

Note : on pourrait aussi utiliser $\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$ pour montrer que $(u_n + v_n)$ est une suite constante.

On obtient $K^n = (-3)^n (I - J) + J$ soit $K^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1 - (-3)^n & 1 & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix}$

Partie -C-

7. Soit $u = (x, y, z)$. Alors $u \in \text{Ker } j \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$.

Ceci montre que

$\text{Ker } j$ est la droite de base $(-2, 1, 1)$

Donc $\text{Im } j$ est de dimension : $3 - \dim \text{Ker } j = 2$. C'est un plan qui contient

$f(e_1)$ et $f(e_2)$ non colinéaires. Son équation est $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0$, soit

$$x + z = 0$$

8. Puisque $J^2 = J$, il est clair que $j \circ j = j$. Donc j est un endomorphisme idempotent.

C'est

la projection sur le plan $\text{Im } j$ suivant la droite $\text{Ker } j$

Le plan $\text{Im } j$ et la droite $\text{Ker } j$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 . En réunissant une base du plan $\text{Im } j$ et une base de la droite $\text{Ker } j$, on forme donc une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 .

Puisque les vecteurs de $\text{Im } j$ sont invariants et que ceux de $\text{Ker } j$ sont d'image nulle,

dans cette base \mathcal{B}' , la matrice de j est

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les bases évoquées précédemment, la matrice P de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' serait

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{mais d'autres matrices conviennent aussi.})$$

9. La matrice de $k = -3 \text{Id} + 4j$ en base \mathcal{B}' est $D = -3I + 4J'$.

On trouve donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et par récurrence $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$

10. Puisque $D = P^{-1}KP$, on obtient $D^n = P^{-1}K^nP$ soit $K^n = PD^nP^{-1}$ ce qui redonne l'expression de K^n après calcul de P^{-1} (ici : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$).

Exercice 2

Question liminaire : nous avons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{(-x)^2} = \frac{1}{2}$.
(si $x \rightarrow 0$ alors $-x \rightarrow 0$)

Par soustraction, il vient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} = 0$$

1. La fonction z définie par $\forall x \in I, z(x) = xy(x)$ est deux fois dérivable comme produit de deux fonctions deux fois dérivables. Dérivons : $z(x) = xy(x)$

$$z'(x) = xy'(x) + y(x)$$

$$z''(x) = xy''(x) + 2y'(x)$$

L'équation $\mathcal{E} : \underbrace{xy''(x) + 2y'(x)}_{=z''(x)} - \underbrace{xy(x)}_{=z(x)} = 4xe^x$ devient $\mathcal{F} : z'' - z = 4xe^x$

2. \mathcal{F} est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ a pour solutions ± 1 . Le coefficient de x dans l'exponentielle est racine simple de cette équation. On peut chercher une solution particulière de \mathcal{F} sous la forme $z(x) = (ax^2 + bx)e^x$:

$$\begin{cases} z(x) &= (ax^2 + bx)e^x & -1 \\ z'(x) &= (ax^2 + (b + 2a)x + b)e^x & 0 \\ z''(x) &= (ax^2 + (b + 4a)x + 2b + 2a)e^x & 1 \\ 4xe^x &= (4ax + 2a + 2b)e^x & \end{cases}$$

Par identification, on obtient la solution particulière de $\mathcal{F} : z : x \mapsto (x^2 - x)e^x$

3. \mathcal{F} est une équation linéaire dont nous connaissons une solution particulière.

Comme les solutions de l'ESSMA sont $y : x \mapsto Ae^x + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}$,

les solutions de \mathcal{F} sont $z : x \mapsto x \mapsto Ae^x + Be^{-x} + (x^2 - x)e^x, A, B \in \mathbb{R}$

Sur $I \subset \mathbb{R}^*$, les solutions de \mathcal{E} sont $x \mapsto y(x) = \frac{z(x)}{x}$

$$y : x \mapsto x \mapsto \frac{Ae^x + Be^{-x}}{x} + (x - 1)e^x, A, B \in \mathbb{R}$$

4. Par raccordement, une solution f sur \mathbb{R} est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A_1 e^x + B_1 e^{-x}}{x} + (x - 1)e^x & \text{si } x > 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \frac{A_2 e^x + B_2 e^{-x}}{x} + (x - 1)e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

— f est continue en 0 ssi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Or $\frac{Ae^x + Be^{-x}}{x} + (x - 1)e^x = A \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\rightarrow 1} + B \underbrace{\frac{e^{-x} - 1}{x}}_{\rightarrow -1} + \frac{A+B}{x} + \underbrace{(x - 1)e^x}_{\rightarrow -1}$

a une limite finie en 0 si et seulement si $A + B = 0$. Cette limite vaut $A - B - 1$.

f est donc continue en 0 ssi $\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 = 0 \\ a = A_1 - B_1 - 1 = A_2 - B_2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = A_2 = -A \\ a = 2A_1 \end{cases}$

f est alors définie par $f(x) = \begin{cases} A \frac{e^x - e^{-x}}{x} + (x - 1)e^x & \text{si } x \neq 0 \\ 2A - 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

— Étudions maintenant la dérivabilité de f en 0 (par la limite du taux d'accroissement) :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{A \frac{e^x - e^{-x}}{x} + (x - 1)e^x - 2A + 1}{x} \\ &= A \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2} + (x - 1) \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \\ &= A \underbrace{\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2}}_{\rightarrow 0} + (x - 1) \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{\frac{x - 1}{x}}_{=1} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Pour $x = 0$: $0 \cdot f''(0) + 2 \cdot f'(0) - 0 \cdot f(0) = 4 \cdot 0 \cdot e^0$: l'équation est vérifiée.

Les solutions de \mathcal{E} sur \mathbb{R} sont les fonctions f ci-dessus.

5. La condition initiale $y(0) = 0$ est équivalente à $2A - 1 = 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$

Alors : $f(x) = \frac{\text{sh}x}{x} + (x - 1)e^x$

Exercice 3
Partie -A-

- φ est définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.
 - nature de l'image** : il est clair que l'image est un polynôme
 - degré de l'image** : $\varphi(P)$ est visiblement au plus égal à 2 puisque P' est au plus de degré 1 et que P'' est constant.
 - linéarité de φ** : elle provient de la linéarité de la dérivation :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda Q) &= (X^2 - 1)(P + \lambda Q)'' + 2X(P + \lambda Q)' \\ &= (X^2 - 1)(P'' + \lambda Q'') + 2X(P' + \lambda Q') \\ &= (X^2 - 1)P'' + 2XP' + \lambda((X^2 - 1)Q'' + 2XQ') = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q) \end{aligned}$$

CONCLUSION φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

2. La matrice de φ s'obtient en cherchant l'image de la base :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(1) = (X^2 - 1)0 + 2X0 = 0 \\ \varphi(X) = (X^2 - 1)0 + 2X1 = 2X \\ \varphi(X^2) = (X^2 - 1)2 + 2X2X = -2 + 6X^2 \end{array} \right\} \text{ d'où } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Utilisons la matrice pour trouver le noyau :

$$P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2c = 0 \\ 2b = 0 \\ 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0$$

CONCLUSION $\text{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des polynômes constants

Le noyau est de dimension 1. Le théorème du rang indique que l'image est de dimension $3-1=2$. Comme l'image est engendrée par l'image d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$, en consultant la matrice on trouve immédiatement que $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(2X, -2 + 6X^2)$

soit $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(X, 1 - 3X^2) = \{a + bX - 3aX^2, \quad a, b \in \mathbb{R}\}$

4. (a) L'endomorphisme $(\varphi - \lambda \text{Id})$ est non bijectif si et seulement si sa matrice n'est pas inversible, soit ici, étant triangulaire, si et seulement si un des coefficients diagonaux est nul

CONCLUSION $(\varphi - \lambda \text{Id})$ bijectif sauf pour $\lambda = 0, \lambda = 2, \lambda = 6$

(b) Avec $\lambda = 6$, la matrice ci-dessus permet le calcul du noyau de $(\varphi - 6 \text{Id})$:

$$\begin{cases} -6a - 2c = 0 \\ -4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{Ker}(\varphi) = \{a(1 - 3X^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Partie -B-

L'équation différentielle $(\mathcal{E}) \quad (x^2 - 1)y'' + 2xy' - 6y = 0$ est définie sur $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Elle est linéaire du second ordre sans second membre (mais les coefficients ne sont pas constants).

1. Recherchons le degré des polynômes solutions de (\mathcal{E}) : si P de degré n est solution alors :

- $n = 0 \Rightarrow P = a$. La condition est $-6a = 0$ donc $P = 0$
- $n = 1 \Rightarrow P = a + bx$. \mathcal{E} devient $2bx - 6(a + bx) = 0 \Leftrightarrow -4bx - 6a = 0$ donc $P = 0$
- $n \geq 2 \Rightarrow P = ax^n + \dots, P' = nax^{n-1}, P'' = n(n-1)ax^{n-2}$.

Alors $(x^2 - 1)P'' + 2xP' - 6P$ est au plus de degré n .

Le coefficient de x^n est $a(n(n-1) + 2n - 6)$.

Il doit être nul, d'où la condition nécessaire (a n'étant pas nul) $n^2 + n - 6 = 0$ soit $n = 2$ ou $n = -6$. Seul, $n = 2$ conviennent. Nous venons de montrer

que l'ensemble des solutions polynomiales de (\mathcal{E}) sont dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Quels sont ces polynômes ? puisque ces polynômes sont dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'équation s'écrit alors $\varphi(P) - 6P = 0$. L'ensemble de ces solutions est le noyau de $(\varphi - 6 \text{Id})$ calculé au **A-3-b**. CONCLUSION $P \in \mathbb{R}[X]$ est solution de $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow P = a(1 - 3X^2)$

Le polynôme qui vérifie $K(0) = 1$ est donc

$K(X) = 1 - 3X^2$

Soit $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)K^2(x)} = \frac{1}{(x^2 - 1)(3x^2 - 1)^2}$ et F la primitive qui s'annule en 0.

2. (a) Vérifions que KF est solution de (KE) :

$$\begin{aligned} (KF)' &= K'F + Kf \quad \text{et} \quad (KF)'' = K''F + 2K'f + Kf' \\ \text{d'où} \quad &(x^2 - 1)(KF)'' + 2x(KF)' - 6(KF) \\ &= F \underbrace{((x^2 - 1)K'' + 2xK' - 6K)}_{=0 \text{ car } K \text{ solution de } \mathcal{E}} + f \underbrace{((x^2 - 1)2K' + 2xK)}_{=A} + \underbrace{(x^2 - 1)Kf'}_{=B} \end{aligned}$$

Comme $KA = ((x^2 - 1)K^2)'$ il vient

$$KB = f \underbrace{((x^2 - 1)K^2)'}_{=1} + (x^2 - 1)K^2 f' = \underbrace{(f(x^2 - 1)K^2)'}_{=1} = 0$$

Comme K ne s'annule pas sur I : $KB = 0 \Rightarrow B = 0$.

KF est solution de \mathcal{E}

(b) Pour expliciter F , il suffit de décomposer en éléments simples (avant d'intégrer) :

$$f = \frac{1}{(x^2-1)(3x^2-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x\sqrt{3}+1)^2} + \frac{d}{x\sqrt{3}+1} + \frac{e}{(x\sqrt{3}-1)^2} + \frac{h}{x\sqrt{3}-1}$$

la parité donne $b = -a, \quad c = e \quad \text{et} \quad h = -d$

le calcul de a est classique (multiplication par $(x-1)$ puis $x=1$) $a = \frac{1}{8}$

le calcul de e est identique $e = -\frac{3}{8}$

puis on remplace x par 0 : $-1 = \underbrace{-a+b}_{=-2a=-1/4} + \underbrace{c+e}_{=2e=-3/4} + \underbrace{d-h}_{=-2h} \quad h=0$

On obtient donc
$$f = \frac{1/8}{x-1} - \frac{1/8}{x+1} - \frac{3/8}{(x\sqrt{3}+1)^2} - \frac{3/8}{(x\sqrt{3}-1)^2}$$

Ceci s'intègre facilement.

Comme $\frac{1-x}{1+x} > 0$ sur $] -1, 1[$, on obtient
$$F(x) = \frac{1}{8} \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{3}{4} \frac{x}{3x^2-1}$$

3. Nous avons deux solutions (K, KF) qui forment une famille libre (K n'étant pas nulle, il faudrait que F soit une fonction constante). L'espace vectoriel des solutions étant de dimension 2, cette famille en est une base. Une fonction est solutions si et seulement si elle est combinaison linéaire de K et KF :

$$\mathcal{S} = \{K(\alpha F + \beta) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Partie -C-

$$L(X) = \prod_{k=1}^d (X - \tau_k) \quad R(X) = \frac{1}{(X^2-1)L^2(X)} \quad i \neq j \Rightarrow \tau_i \neq \tau_j.$$

Les τ_i sont différents deux à deux, d'où la forme de la décomposition :

$$R(X) = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \sum_{k=1}^d \frac{A_k}{(X-\tau_k)^2} + \sum_{k=1}^d \frac{B_k}{X-\tau_k}$$

1. Le calcul de a et b est classique (multiplication par $(X-1)$ puis $X=1 \dots$). Il donne $\alpha = \frac{1}{(1+1)L^2(1)}, \quad \beta = \frac{1}{(-1-1)L^2(-1)}$ $\alpha = \frac{1}{2L^2(1)} \quad \beta = \frac{-1}{2L^2(-1)}$

2. Une méthode semblable permet le calcul des A_k (multiplication par $(X-\tau_k)^2$ puis $X=\tau_k$). En notant $L_k = \prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \neq k}} (X - \tau_i)$ on obtient $A_k = \frac{1}{(\tau_k^2-1)L_k^2(\tau_k)}$.

En dérivant $L(X) = (X - \tau_k)L_k(X)$, il vient $L'(X) = L_k(X) + (X - \tau_k)L'_k(X)$ soit encore $L'(\tau_k) = L_k(\tau_k)$. Finalement $A_k = \frac{1}{(\tau_k^2-1)(L'(\tau_k))^2}$

3. Note : En dérivant une deuxième fois, il vient :

$$L''(X) = 2L'_k(X) + (X - \tau_k)L''_k(X), \quad \text{d'où} \quad L''(\tau_k) = 2L'_k(\tau_k).$$

Le calcul du résidu relatif à un pôle double est connu. Il provient de l'égalité

$$(X - \tau_k)^2 R(X) = A_k + (X - \tau_k)B_k + (X - \tau_k)^2 \Psi(X)$$

qui montre que B_k est la valeur en τ_k de

$$((X - \tau_k)^2 R(X))' = \left(\frac{1}{(X^2-1)L_k^2(X)} \right)' = -\frac{2XL'_k(X) + (X^2-1)2L_k(X)L'_k(X)}{((X^2-1)L_k^2(X))^2}$$

En utilisant les égalités précédentes, on obtient :

$$B_k = -\frac{2\tau_k L_k^2(\tau_k) + (\tau_k^2-1)2L_k(\tau_k)L'_k(\tau_k)}{((\tau_k^2-1)L_k^2(\tau_k))^2} = -\frac{2\tau_k(L'(\tau_k))^2 + (\tau_k^2-1)L'(\tau_k)L''(\tau_k)}{(\tau_k^2-1)^2(L'(\tau_k))^4}$$

soit, après simplification :
$$B_k = -\frac{2\tau_k L'(\tau_k) + (\tau_k^2-1)L''(\tau_k)}{(\tau_k^2-1)^2(L'(\tau_k))^3}$$

4. Soit $S(X) = (X^2-1)L''(X) + 2XL'(X)$.

On remarque que le numérateur de B_k est $S(\tau_k)$. Comme $\tau_k \neq \pm 1$, il est alors évident que $(\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad B_k = 0) \Leftrightarrow (\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad S(\tau_k) = 0)$

Puisque les τ_k sont distincts deux à deux, nous en déduisons

$$S(X) = Q(X) \prod_{k=1}^d (X - \tau_k) = Q(X)L(X)$$

D'autre part, la forme de S montre que $\deg(S) \leq \deg(L)$. On en déduit que Q est constant, donc $S(X) = \mu L(X), \quad \mu \in \mathbb{R}$.

L étant normalisé, μ est le coefficient dominant de S . Calculons le :

$$\begin{cases} L = X^d + \dots \\ L' = dX^{d-1} + \dots \\ L'' = d(d-1)X^{d-2} + \dots \end{cases} \Rightarrow S = (d(d-1) + 2d)X^d + \dots \quad \text{soit}$$

$$\mu = d(d+1)$$

5. Lorsque $d=2$, nous obtenons $\mu=6$. L est le polynôme normalisé de degré 2 tel que $S=6L$, c'est-à-dire $(X^2-1)L'' + 2XL' = 6L$.

L est donc la solution normalisée de \mathcal{E} , soit
$$L = X^2 - \frac{1}{3}$$

Exercice 4

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Pour $k \geq 1$ on a pour tout $x \in \mathbb{R} : \frac{dx^k}{dx} = kx^{k-1}$ donc

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \quad \text{réindexé } h = k - 1 \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{h+1} x^h = - \sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^h \\ &= - \frac{(-x)^{2n} - 1}{-x - 1} = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1} \quad \text{car } -x \neq 1 \end{aligned}$$

2. P'_n est du signe de $x^{2n} - 1$ et comme $2n > 0$ la fonction $x \rightarrow x^{2n} - 1$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ (et strictement décroissante sur \mathbb{R}^- puisque $2n$ est pair) donc

x	0	1	$+\infty$
$x^{2n} - 1$	-	0	+
$P'_n(x)$	-	0	+
$P_n(x)$	0	$P_n(1)$	$+\infty$

en $+\infty$ on a : $P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n} = x^{2n} \left(-x^{2n-1} + \frac{x^{2-2n}}{2} + \dots + \frac{-x^{-1}}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) \rightarrow +\infty$

3. Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ alors $P_n(1) < P_n(0) = 0$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right) \end{aligned}$$

(b) On a donc en particulier pour $x = 2$:

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} \right)$$

Et comme $-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0$ la suite $(P_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors croissante.

Comme de plus $P_1(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0$ alors pour tout entier $n \geq 1 : P_n(2) \geq P_1(2) \geq 0$

5. On utilise alors le théorème de bijection :

P_n est continue et strictement croissante sur $]1, 2]$ donc bijective de $]1, 2]$ dans $] \lim_1 f, f(2)] =]f(1), f(2)]$

Or $f(1) < 0 \leq f(2)$ donc $0 \in]f(1), f(2)]$

Et l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution $x_n \in]1, 2]$

Et comme P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, elle n'a pas d'autres solutions sur cet intervalle.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, admet une solution et une seule notée x_n sur $[1, +\infty[$, et $1 < x_n \leq 2$

6. On programme la méthode de dichotomie pour programmer le calcul de x_2 à 10^{-3} près : On utilise pour raccourcir les calculs que $P_2(x) = -x + x^2/2 - x^3/3 + x^4/4 = x[-1 + x(1/2 + x[-1/3 + x/4])]$

```
def p(x:real):
    return x*(-1+x(1/2+x(-1/3+x/4)));
```

```
def dichotomie():
    a=0
    b=1
    while abs(b-a)> 10**(-3):
        c=(a+b)/2
        if p(c)>0:
            b=c
        else:
            a=c
    return b
```

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. On a vu précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$: $P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$. P_n est donc la primitive dont on a besoin pour l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt &= [P_n(t)]_0^x = P_n(x) - P_n(0) \\ &= P_n(x) \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P_n(x_n) = 0$ donc $\int_0^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = 0$ et par Chasles $\int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = 0$ d'où

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = - \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt \quad ((1))$$

3. On étudie les variations de la différence : Soit $f(x) = t^{2n} - 1 - n(t^2 - 1)$. f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$f'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt(t^{2n-2} - 1).$$

et pour $n \geq 1$ on aura $2n - 2 \geq 0$ donc si $t \geq 1$ alors $t^{2n-2} \geq 1^{2n-2}$ d'où $f'(t) \geq 0$

Donc pour $n \geq 1$, f est croissante sur $[1, +\infty[$.

De plus $f(1) = 0$ donc pour tout $t \in [1, +\infty[$: $f(t) \geq 0$ et

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$$

4. On a alors tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \geq 1$

$$\frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq \frac{n(t^2 - 1)}{t + 1}$$

comme $1 \leq x_n$ (bornes de l'intégrale croissantes)

$$\begin{aligned} \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt &\geq \int_1^{x_n} \frac{n(t^2 - 1)}{t + 1} dt = \int_1^{x_n} n(t - 1) dt = n \left[\frac{(t - 1)^2}{2} \right]_1^{x_n} \\ &\geq \frac{n(x_n - 1)^2}{2} \end{aligned}$$

que l'on réintroduit dans l'équation du ?? pour obtenir :

$$\frac{n(x_n - 1)^2}{2} \leq \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$$

intégrale que l'on majore à nouveau par $1 - t^{2n} \leq 1$ d'où (bornes croissantes)

$$\int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t + 1} dt = [\ln(t + 1)]_0^1 = \ln(2)$$

d'où finalement :

$$0 \leq \frac{n(x_n - 1)^2}{2} \leq \ln(2) \quad \text{d'où}$$

$$0 < (x_n - 1)^2 \leq \frac{2 \ln 2}{n} \quad \text{et}$$

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}} \quad \text{car } x_n - 1 \geq 0$$

5. Et par encadrement $x_n - 1 \rightarrow 0$ et donc $x_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$