

Devoir Surveillé 08

Le vendredi 3 Avril 2026

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Partie -A-

On considère l'ensemble $E = \{aI + bJ \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que l'ensemble E est un espace vectoriel.

En citer une base et donner sa dimension.

2. Calculer J^2 et montrer que E est stable par le produit matriciel.

3. Quels sont les éléments de E qui ont un inverse dans E ?

4. Résoudre dans E l'équation $X^2 = X$.

Partie -B-

On se propose de déterminer les puissances entières de K .

5. Montrer que $K \in E$ et en déduire qu'il existe des suites (u_n) et (v_n) de nombres réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}, K^n = u_n I + v_n J$.

6. Calculer u_n en fonction de n et en déduire l'expression de K^n .

Partie -C-

On se propose de calculer K^n par une autre méthode.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 ; on notera i, j et k les endomorphismes de \mathbb{R}^3 associés respectivement à I, J et K en cette base \mathcal{B} .

7. Déterminer $\text{Ker } j$ et $\text{Im } j$.

8. Quelle est la nature géométrique de j ?

En déduire une base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de j est $J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(on précisera la matrice P de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}').

9. Calculer la matrice D de k dans la base \mathcal{B}' .

Déterminer l'expression de la matrice D^n en fonction de l'entier n .

10. En déduire à nouveau l'expression de K^n en fonction de n .

Exercice 2

Soit I un intervalle de \mathbb{R} ne contenant pas 0 et y une fonction réelle de la variable réelle x , définie sur I . On donne l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : \quad x y'' + 2y' - x y = 4x e^x$$

1. On pose $\forall x \in I, \quad z(x) = x \cdot y(x)$.

Montrer que y est solution de \mathcal{E} si et seulement si z est solution d'une équation différentielle \mathcal{F} que l'on précisera.

2. Résoudre \mathcal{F} sur I .

En déduire les solutions de \mathcal{E} sur I .

3. On pose $\varphi(x) = \frac{Ae^x + Be^{-x}}{x}$ où A et B sont deux constantes réelles.

(a) Utiliser un développement limité pour répondre aux questions suivantes ;

(-1-) A quelle condition la fonction φ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

(-2-) La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?

(b) Exprimer $\varphi(x)$ en utilisant les fonctions hyperboliques.

Retrouver alors la condition (-1-) ci-dessus.

4. **Raccordement des solutions :**

(a) Déterminer toutes les solutions de \mathcal{E} sur \mathbb{R} autrement dit les solutions qui sont à la fois solutions sur \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- , continue en 0, dérivable en 0 et telle que les valeurs ainsi posées en 0 vérifient encore \mathcal{E} .

(b) Déterminer l'unique solution y de \mathcal{E} sur \mathbb{R} qui vérifie $y(0) = 0$.

Exercice 3

LES PARTIES **A**, **B** ET **C** PEUVENT ÊTRE TRAITÉES INDÉPENDAMMENT, MAIS IL SERA JUDICIEUX D'UTILISER LES LIENS ENTRE CES DIFFÉRENTES PARTIES.

Partie -A-

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. A tout élément P de $\mathbb{R}_2[X]$ on fait correspondre le polynôme $\varphi(P)$ tel que :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme φ d'espace vectoriel dans $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Déterminer l'image et le noyau de φ .

4. On note Id l'identité dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère un nombre réel λ .

(a) Montrer que $(\varphi - \lambda \text{Id})$ est bijectif, sauf pour un nombre fini de valeurs de λ que l'on précisera.

(b) On appelle δ la plus grande des valeurs trouvées à la question précédente. Déterminer le noyau de $(\varphi - \delta \text{Id})$.

Partie -B-

On désigne par I l'intervalle réel $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, et on considère sur I l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad (x^2 - 1)y'' + 2xy' - 6y = 0$$

- Déterminer les fonctions polynômes solution de (\mathcal{E}) . On pourra d'abord montrer que si un polynôme est solution alors il est de degré au plus 2.
- Soit K la fonction polynôme solution de (\mathcal{E}) vérifiant $K(0) = 1$.
On définit la fonction f sur I par : $\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)K^2(x)}$.
On appelle F la primitive de f s'annulant en 0.
 - Montrer que la fonction KF est solution de (\mathcal{E}) .
 - Expliciter F .
- Sachant que l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (\mathcal{E}) constitue un espace vectoriel de dimension 2, déterminer \mathcal{S} .

Partie -C-

Soit d un entier strictement positif et soient $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d$ des nombres réels deux à deux distincts et différents de -1 et de +1. On considère le polynôme L tel que $L(X) = \prod_{k=1}^d (X - \tau_k)$, et la fraction rationnelle R telle que $R(X) = \frac{1}{(X^2 - 1)L^2(X)}$.

On sait qu'il existe $(2d+2)$ nombres réels $\alpha, \beta, A_1, A_2, \dots, A_d, B_1, B_2, \dots, B_d$ tels que :

$$R(X) = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\beta}{X + 1} + \sum_{k=1}^d \frac{A_k}{(X - \tau_k)^2} + \sum_{k=1}^d \frac{B_k}{X - \tau_k}$$

- Calculer α et β en fonction de $L(1)$ et $L(-1)$.
- Exprimer A_k en fonction de τ_k et de $L'(\tau_k)$.
- Exprimer B_k en fonction de τ_k , de $L'(\tau_k)$ et de $L''(\tau_k)$.
- On définit le polynôme S par : $S(X) = (X^2 - 1)L''(X) + 2XL'(X)$.
Prouver l'équivalence : $(\forall k \in \llbracket 1, d \rrbracket, B_k = 0) \Leftrightarrow (\exists \mu \in \mathbb{R} \quad S = \mu L)$ et exprimer μ , quand il existe, en fonction de d .
- Dans le cas où d est égal à 2, déterminer le polynôme L tel que : $\forall k \in \{1, 2\}, B_k = 0$.

Exercice 4

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + x^2 + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. Etude des fonctions polynomiales P_n

- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}, \text{ où } P'_n \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

- Etudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .
- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

(a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 2$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

5. Ecrire un programme en langage Python qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt.$$

3. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1; +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2} (x_n - 1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.