Devoir Surveillé 07

Le vendredi 23 Février 2024
15h30-17h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1
Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Justifier que pour tout réel x , l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^1 f(tx)dt$ existe.
   On appellera I la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $I(x)$.
   (b) Calculer $I(0)$.
   (c) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad I(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u)du$
   (d) Etudier la parité de I suivant celle de f.
   (e) Démontrer que I est continue en 0.
   (f) Démontrer que I est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer, pour tout réel x différent de 0, $I'(x)$.
2. On suppose maintenant que de plus f est dérivable en 0.
   Démontrer que I est dérivable en 0 et calculer $I'(0)$.
3. On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, I'(x) = \displaystyle\int_0^1 tf'(tx)dt$
4. On se propose de déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant la relation :

$$(1) : \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^1 f(tx)dt = xf(x)$$

   (a) Soit f une telle fonction. Calculer $f(0)$ et montrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$(2) : \qquad (1-2x)y = x^2y'$$

   (b) Déterminer toutes les solutions de (2) sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant la relation (1).
   (c) Etudier et représenter graphiquement la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
   (d) Déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$(3) : \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^1 f(tx)dt = xf(x) + \frac{x(1-2x)}{2}$$