Devoir Surveillé 07 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée fonctions continues sur $\mathbb{R}$.donc l'intégrale $I(x)$ existe.

(b) $\boxed{I(0) = \int_0^1 f(0)dt = f(0)}$

(c) On effectue le changement de variable de classe C^1 sur $[0;1]$: $u = tx$ alors $du = xdt$ donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad I(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)du}$$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et $I(-x) = \dfrac{1}{-x}\displaystyle\int_0^{-x} f(u)du \underbrace{=}_{t=-u} \dfrac{-1}{x}\displaystyle\int_0^x f(-t)(-dt) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(-t)dt$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = I(x) \text{ si f est paire} \\ \frac{-1}{x}\int_0^x f(t)dt = -I(x) \text{ si f est impaire} \end{cases}.$$

Conclusion : I et f ont la même parité.

(e) $I(x) = \dfrac{\displaystyle\int_0^x f(u)du}{x} = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ où F est la primitive de f qui s'annule en 0.

Alors $\lim\limits_{x \to 0} I(x) = F'(0) = f(0) = I(0)$ donc $\boxed{I \text{ est continue en } 0}$.

(f) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(u)du$ est dérivable sur R^*.

Alors I est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, I'(x) = -\frac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(u)du + \frac{1}{x}f(x)$

I est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et , pour tout réel x différent de 0, $\boxed{I'(x) = -\frac{1}{x}I(x) + \frac{1}{x}f(x)}$.

2. On suppose maintenant que de plus f est dérivable en 0.

$$\frac{I(x) - I(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x^2}(F(x) - xf(0))$$

or f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 : $f(u) = f(0) + uf'(0) + o(u)$ ainsi par théorème d'intégration $F(x) = \underbrace{F(0)}_{=0} + xf(0) + \frac{x^2}{2}f'(0) + o(x^2)$

alors $\dfrac{I(x) - I(0)}{x - 0} = \frac{1}{2}f'(0) + o(1)$ donc $\boxed{I \text{ est dérivable en 0 et calculer } I'(0) = \frac{1}{2}f'(0)}$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^*, I'(x) = \frac{-1}{x}\displaystyle\int_0^1 f(tx)dt + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x}\left[\int_0^1 (f(x) - f(tx))\right]$

on effectue une intégration par partie puisque la fonction $t \mapsto f(x) - f(tx)$ est de classe C^1 en tant que somme et composée de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ alors en posant $u(t) = f(x) - f(tx)$ et $v'(t) = 1$ il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, I'(x) = \frac{1}{x}\left(\underbrace{[tf(x) - tf(tx)]_0^1}_{=0} - \int_0^1 -txf'(tx)dt\right) = \int_0^1 tf'(tx)dt$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, I'(x) = \int_0^1 tf'(tx)dt}$$

4. On se propose de déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant la relation :

$$(1) : \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^1 f(tx)dt = xf(x)$$

(a) Soit f une telle fonction. $f(0) = 0f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

$\forall x \neq 0, xf(x) = \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u)du = \frac{1}{x}F(x) \Rightarrow F(x) = x^2 f(x) \Rightarrow f(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$ en dérivant

donc f est solution de l'équation différentielle : $\boxed{(2) : \qquad (1 - 2x)y = x^2 y'}$

(b) Soit a la fonction définie sur R_+^* par $a(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x}$. a est continue sur R_+^*, admet donc des primitives sur R_+^*. Soit A une primitive définie par $\forall x \in R_+^*, A(x) = \frac{1}{x} + 2\ln|x| = \frac{1}{x} + 2\ln x$

Les solutions de (2) sont donc les fonctions de la forme $y(x) = ke^{\frac{-1}{x} - 2\ln x} = \frac{k}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Réciproquement si on pose $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

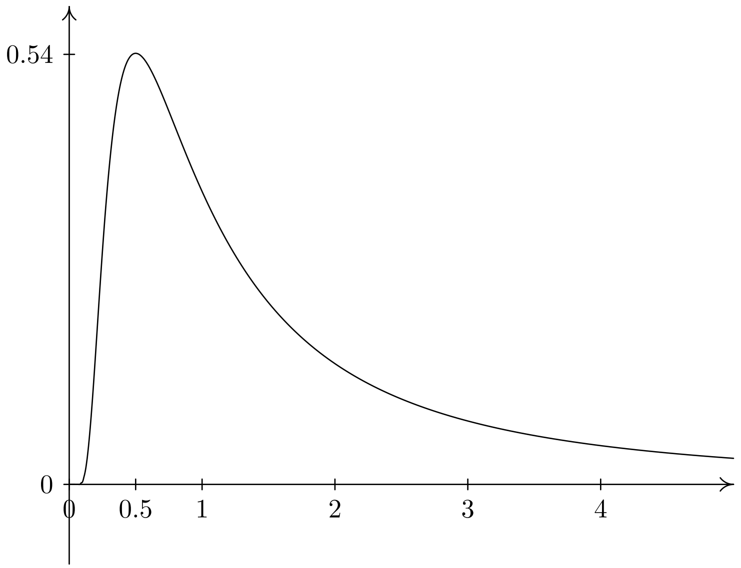
alors on vérifie aisément que $\frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(u)du = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{k}{u^2}e^{\frac{-1}{u}}du = xf(x)$

et que la fonction est continue en 0 puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{k}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} = 0 = f(0)$

Conclusion : les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant la relation (1) sont les fonction définies par $\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}}$.

(c) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \frac{-2}{x^3}e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^4}e^{\frac{-1}{x}} = \frac{1}{x^4}e^{\frac{-1}{x}}(1-2x)$

g est donc croissante sur $]0;\frac{1}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{1}{2};+\infty[$. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$



(d) On raisonne de la même façon que précédemment

(3) : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^1 f(tx)dt = xf(x) + \frac{x(1-2x)}{2} \Rightarrow \frac{1}{x}F(x) = xf(x) + \frac{x(1-2x)}{2} \Rightarrow F(x) = x^f(x) + \frac{x^2(1-2x)}{2} \Rightarrow f(x)(1-2x) = x^2f'(x) + x - 3x^2$

Reste donc à trouver une solution particulière de l'ED : $(1-2x)y = x^2y' + x - 3x^2$; or la fonction $y = x$ est solution paticulière évidente.

Conclusion : les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant la relation (3) sont les fonction définies par $\boxed{f(x) = \begin{cases} x + \frac{k}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}}$.